

# Using the Conformal Mapping In Complex Variables Method

**Dr. Eng. IHSSAN TARSHA**  
CIVIL ENG.  
ALBAATH UNIVERSITY

**Eng. SOHA WAHBY**  
CIVIL ENG.  
ALBAATH UNIVERSITY

## **Abstract**

In this paper is presented the solution for an elastic problem for plane stress. The problem refers to a composite (built-up) plate from rectangular and centric circular ring, subjected to uniform external and internal pressure.

The used method is the complex variable method and conformal mapping. The complex stress function can be found in the Laurent series and can be determined from the boundary conditions by solution a set of linear algebraic equations. The number of equations needed for sufficient accuracy depends upon the boundary shapes and loading conditions of the problem.

*Keywords : Complex Variables , Conformal Mapping , Laurent series ,Boundary Conditions .*

# استخدام التمثيل المطابق في طريقة المتغيرات العقديّة

د.م إحسان الطرشة  
أستاذ بكلية الهندسة المدنية  
في جامعة البعث

م . سهى وهبي  
مشرفة على الأعمال  
بكلية الهندسة المدنية في جامعة البعث

## ملخص البحث :

يتعرض هذا البحث لحل مسألة مرونة ذات حالة إجهادية مستوية وهي عبارة عن صفيحة مربعة معرضة لحمولة خارجية موزعة بانتظام على محيطها ، ومجمعة بالتداخل القسري " Interconnected by Force " مع حلقة دائرية معرضة لضغط داخلي منتظم . وقد تم استخدام طريقة المتغيرات العقديّة " Complex Variables Method " والتصوير أو التمثيل المطابق " Conformal transformation - mapping " . إن توابع الإجهادات التي سنبحث عنها ستكون على شكل سلسلة قوى " منشور سلسلة لوراننت " معالماتها أو أمثالها الثابتة تحدد بحل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية والتي تم الحصول عليها من الشروط الحدودية " Boundary Conditions " للمسألة المدروسة. إن حدود سلسلة لوراننت وبالتالي عدد المعادلات الجبرية يتعلق بدقة الحل المطلوبة والتي بدورها تتعلق بالشكل الهندسي للصفيحة و بشكل الحمولة المطبقة .  
الكلمات المفتاحية: متغيرات عقديّة ، تمثيل مطابق ، سلسلة لوراننت ، الشروط الحدودية .

## المقدمة :

إن استخدام طريقة المتغيرات العقديّة " Complex Variables " من قبل الباحثين Sokolinkoff [2] و Muskhelishvili [3] و Kolossoff و Markushevich [13] ، ساعد في حل العديد من مسائل المرونة وذلك باستخدام بعض تكاملات المعادلات التفاضلية الشاذة مما

ترافق بصعوبة رياضية، إلى أن قدم Sherman 1959 و [9] Amenzade و [10] Bahtayarov ، طرقاً تحليلية عددية يمكن استخدام الحاسوب ( الكمبيوتر ) فيها . وبالتالي لاقت طريقة المتغيرات العقدية انتشاراً واسعاً في حل العديد من المسائل ذات الشروط الحدودية المختلفة، والتي تعد مسألة هذا البحث إحداها.

لقد تم تطوير طريقة المتغير العقدي لتطبيقها في معالجة المسائل المستوية المتناحية الخواص " غير المتجانسة الخواص باختلاف الاتجاهات (non-isotropic) " وذلك من قبل Lekhnitskii 1963 و [19] Becker و Zaharov وغيرهم والتي كانت أعمالهم امتداداً لأعمال [20] A.N.Stroh في مجال دراسة التشوهات المستوية للأجسام الصلبة غير المتجانسة ، حيث بتطبيق هذه الطريقة تم إيجاد حلول عامة شاملة للبلاطات المنعطفة غير المتجانسة .

ونشير أيضاً إلى أن طريقة المتغير العقدي تم استخدامها في ميكانيك الانهيار (Fracture Mechanic) من قبل [17] Bosakov و [18] Pak & Gobert و [8] Ballarini ، وتم إدخال المتغير العقدي في طريقة العناصر المحيطية (Boundary Element Method) من قبل [14] Brebbia و [15] Chandra & Mukhjerjee و [16] Hromadka & Lai وغيرهم . وفي هذا البحث نعالج مسألة مرونة ذات حالة إجهادية مستوية وهي عبارة عن صفيحة مربعة مجمعة بالتداخل القسري مع حلقة دائرية ، ومعرضة لضغط داخلي وخارجي منتظم ، ولحساب الإجهادات الناشئة فيها سنستخدم طريقة المتغيرات العقدية " Complex Variables Method " ونظراً لكون الصفيحة غير دائرية " مربعة " سندخل مفهوم التصوير أو التمثيل المطابق " Conformal transformation - mapping " .

إن توابع الإجهادات في كل مجال أو ساحة " domain or region " يجري البحث عنها على شكل سلسلة قوى " منشور سلسلة لورانت - Laurent series expansions " معاملاتها الثابتة تحدد بحل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية والتي تم الحصول عليها من الشروط المحيطية " Boundary Conditions " للمسألة المدروسة .

أما الإجهادات في أي نقطة ( $z$ ) من مجالات المسألة المدروسة فإنها تعطى بتطبيق علاقة  
التالية: [9] (G.V.Kolosoff & N.I.Muskhelishvili)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \cdot [\varphi'_j(z) + \overline{\varphi'_j(z)}] = 4 \cdot \text{Re}[\varphi'_j(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2 \cdot i \tau_{xy} &= 2 \left[ \bar{z} \cdot \varphi''_j(z) + \psi'_j(z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (j=1,2). \quad (1)$$

حيث إن :  $\tau_{xy}$  - الإجهاد المماسي .

$\sigma_x$  ;  $\sigma_y$  - الإجهادات الناطمية وفق المحورين الإحداثيين الديكارتيين .

#### هدف البحث وطريقته :

في هذا البحث سوف نعالج مسألة توزيع الإجهادات بصفيحة مربعة مجمعة  
" Composite or Built-up " بالتداخل القسري " heavy-force " مع حلقة دائرية لها السماكة  
نفسها والمبينة في الشكل (1) ، مكونة من ساحتين أو مجالين ( $S_j$  ( $j=1,2$ ) ، ومؤلفة من  
مواد مختلفة معاملات القص وثوابت المرونة الموافقة هي ( $\mu_j$  ,  $\chi_j$  ( $j=1,2$ ) ، وتخضع  
لضغط خارجي  $P_1$  و داخلي  $P_2$  موزعين بانتظام [20].

إن حل المسألة المذكورة يتم بالبحث عن زوجين من التوابع العقديّة  
 $\psi_j(z)$  ,  $\varphi_j(z)$  ( $j=1,2$ ) التحليلية والمنتظمة في المجالات ( $S_j$  ( $j=1,2$ ) ، بشكل

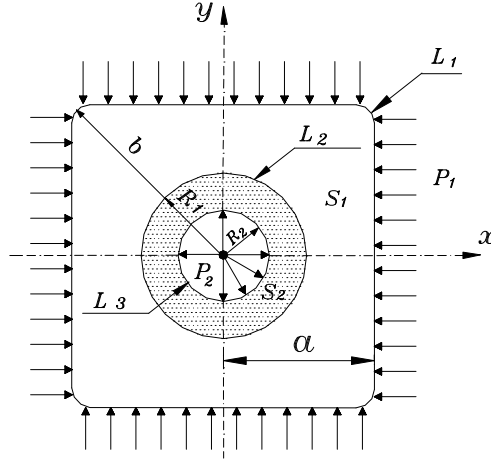
سلسلة لوران " Laurent Series " وفق الشكل التالي [10] :

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^N a_k^{(1)} \left( \frac{z}{A} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{R_2}{z} \right)^k \quad z \in S_1 \quad (2)$$

$$\psi_1(z) = \sum_{k=0}^N A_k^{(1)} \left( \frac{z}{A} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(1)} \left( \frac{R_2}{z} \right)^k \quad z \in S_1 \quad (3)$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} \left( \frac{z}{R_2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left( \frac{R_1}{z} \right)^k \quad z \in S_2 \quad (4)$$

$$\psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(2)} \left( \frac{z}{R_2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \left( \frac{R_1}{z} \right)^k \quad z \in S_2 \quad (5)$$



الشكل (1) صفيحة مربعة مغروس فيها حلقة دائرية ومعرضة لضغط داخلي وخارجي

$$A = \frac{a+b}{2}$$

حيث :

- $a; b$  - نصف قطر كل من الدائرتين المماسة داخليا والمارة برؤوس المربعة المدروسة .
- $N$  - عدد معين ثابت قيمته تتعلق بدقة الحل المطلوبة ، ولتسهيل التشكيلات الرياضية التي سنجرىها سنفرض أن  $(N = \infty)$  ، وهذا الفرض ممكن كما سنرى في الحل العددي لأن كل مجموعة من مجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية التي سنحصل عليها سيتم فتحها بعدد محدد من الحدود تكفي لدقة الحل المطلوبة .

• (  $\bar{z} = x - iy$  ;  $z(x, y) = x + iy$  ) : المتغير العقدي ومرافقه في المجال المدروس

، وفقاً لجملة ديكرتية .  $S_j$  (  $j = 1, 2$  ) الواقع في المستوي العقدي (  $Z$  ) ،

• (  $j=1, 2$  ;  $k=1, N$  ) : هي الأمثال أو المعاملات الثابتة  $a_k^{(j)}$  ,  $A_k^{(j)}$  ,  $b_k^{(j)}$  ,  $B_k^{(j)}$  :

المجهولة والتي يطلب تحديد قيمها وتسمى بمعاملات سلسلة القوى .

إن التتابع العقدي المفروضة يجب أن تحقق الشروط المحيطية “Boundary Conditions”

الطرفية والتلامسية التالية [ 9 ] :

على المحيط أو الكنتور " Contour " (  $L_1$  ) لدينا :

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = -P_1 \cdot t + C_1 \quad (6)$$

وعلى المحيط (  $L_2$  ) لدينا :

$$\frac{1}{\mu_1} [\chi_1 \cdot \varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] - \frac{1}{\mu_2} [\chi_2 \cdot \varphi_2(t) - t \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)}] = 2g(t) \quad (7)$$

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} \quad (8)$$

على المحيط (  $L_3$  ) لدينا :

$$\varphi_2(t) + t \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = -P_2 \cdot t + C_2 \quad (9)$$

حيث :

$t$  - دليل النقاط على المحيط (  $L_j$  ) (  $j = 1 \rightarrow 3$  ) في المستوي العقدي (  $Z$  ) .

(  $j = 1, 2$  ) - ثوابت المرنة وتعطى للحالة الإجهادية المستوية بالعلاقة [19]:

$$\chi_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} ; \quad (j=1, 2)$$

(  $j=1, 2$  ) - معامل بواسون .

(  $t$  ) - تابع معلوم ويعبر عن التغير في شعاع الانتقال على المحيط أو الكنتور  $L_2$

$$g(t) = u + iv = \frac{\delta R_2}{R_2} t \quad : \text{ ويساوي } S_2 \text{ الساحة و } S_1 \text{ الساحة}$$

$\delta R_2$  - قيمة التداخل القسري " التوتير - Interference " بين الحلقة الدائرية و الصفيحة المربعة " النقاط الواقعة على الكنتور  $L_2$  " .  
 $C_j$  ( $j=1,2$ ) - ثوابت تحدد أثناء حل المسألة .  
 $\mu_j$  ( $j=1,2$ ) - ثوابت لامي وهي معاملات فيزيائية تتعلق بالمادة وتتطابق مع معاملات القص  $G$  .

بما أن الكنتور  $L_1$  في المستوي العقدي ( $Z$ ) ليس دائرياً لذلك نستخدم التصوير المطابق " Conformal mapping " أو التحويل أو التمثيل المطابق " Conformal transformation " لتحويله إلى دائرة الوحدة ( $\gamma$ ) " وهي دائرة نصف قطرها يساوي الواحد " الواقعة في المستوي العقدي المساعد ( $\zeta$ ) ويتم ذلك باستخدام التابع التالي [3] :

$$t = A \cdot \left( \tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \quad (10)$$

حيث :

$m$  - معامل يتعلق بعدد محاور التناظر للمسألة المدروسة ، و اتجاه المحاور الإحداثية .  
 $\tau$  - دليل النقاط على محيط دائرة الوحدة ( $\gamma$ ) الواقعة في المستوي العقدي ( $\zeta$ ) .  
لتعويض القيمة الحدودية للتابع (1) على المحيط  $L_1$  في الشروط الطرفية (6) ، نجري عدداً من العمليات الرياضية يمكننا من مقارنة العوامل المتغيرة المتشابهة ( $\tau^n$  ;  $\tau^{-n}$ ) وذات الأس المتساوي بعضها مع بعض ، فنجد أن تشكيل الحد الأول من العلاقة (2) بالأخذ بالحسبان العلاقة (10) يتم وفق التالي [20]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left( \frac{t}{A} \right)^k &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \tau^k \left( 1 + \frac{m}{\tau^4} \right)^k \\ &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{\nu=0}^k C_k^{\nu} m^{\nu} \cdot \frac{1}{\tau^{4\nu-k}} \end{aligned}$$

$$C_k^v = \frac{k!}{(k-v)! \cdot v!} \quad \text{حيث :}$$

و بفرض أن :  $n = 4.v - k$  ، نجد :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left( \frac{t}{A} \right)^k &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{n=k}^{3k} C_k^{\frac{n+k}{4}} \cdot m^{\frac{n+k}{4}} \cdot \frac{1}{\tau^n} \\ &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{n=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^{k} C_k^{\frac{k-n}{4}} \cdot m^{\frac{k-n}{4}} \tau^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{n=4E\left(\frac{k}{4}\right)-k+4}^{3k} C_k^{\frac{k+n}{4}} m^{\frac{k+n}{4}} \tau^{-n} \end{aligned}$$

ولكن :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{n=k-4E\left(\frac{k}{4}\right)}^{k} \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \dots \sum_{k=n}^{\infty} \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{n=4E\left(\frac{k}{4}\right)-k+4}^{3k} \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \dots \sum_{k=\frac{n+4\alpha}{3}}^{\infty} \dots \end{aligned}$$

فالحذان الأخيران من العلاقة السابقة يمكن كتابتهما بالشكل :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left( \frac{t}{A} \right)^k = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} \quad (11)$$

حيث :

$$H_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^{\frac{k-n}{4}} \cdot m^{\frac{k-n}{4}} \cdot a_k^{(1)} \quad (12)$$

$$M_n = \sum_{k=\frac{n+4\alpha}{3}}^{\infty} C_k^{\frac{k+n}{4}} \cdot m^{\frac{k+n}{4}} \cdot a_k^{(1)} \quad (13)$$

- -



حيث :

- (\*) : وهي العلامة الموجودة فوق إشارة الجمع  $\sum$  ، و تعني بأن قيم  $k$  سوف تتزايد بالقيمة 4 .
- $E\left(\frac{k}{4}\right)$  : تعني بأن قيمة الحد  $\left(\frac{k}{4}\right)$  تؤخذ مقربة إلى أكبر عدد صحيح .
- $\alpha$  : أصغر عدد صحيح موجب يمكن تعويضه بحيث يكون  $\frac{n+4\alpha}{3}$  بدون باق " عدداً صحيحاً " .

أما الحد الثاني :  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{z}\right)^k$  من العلاقة (2) ، فيمكن تشكيه كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^k$$

و بالأخذ بالحسبان العلاقة (10) نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot \sum_{v=0}^{\infty} C_{-k}^v \cdot m^v \cdot \frac{1}{\tau^{4.v+k}}$$

حيث :  $C_{-k}^v = (-1)^v \cdot C_{k+v-1}^v$

و بفرض :  $n = 4.v + k$  ، نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} C_{-k}^* \frac{n-k}{4} \cdot m^{\frac{n-k}{4}} \cdot \tau^{-n}$$

و حيث إن :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{---} \sum_{n=k}^{\infty *} \text{---} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{---} \sum_{k=n-4E\left(\frac{n-1}{4}\right)}^n \text{---}$$

نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (14)$$

حيث :

$$S_n = \sum_{k=n-4E\left(\frac{n-1}{4}\right)}^n C_{-k}^{\frac{n-k}{4}} \cdot m^{\frac{n-k}{4}} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot b_k^{(1)} \quad (15)$$

عند تعويض العلاقتين (11,14) في (2) ، فإنها تأخذ الشكل التالي :

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(\tau) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (16)$$

وبشكل مشابه ننتقل من المتحول  $t$  إلى المتحول  $\tau$  على  $L_1$  للتتابع  $\psi_1(t) = \psi_1(\tau)$  ،

نجد :

$$\psi_1(t) = \psi_1(\tau) = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \tau^{-n}$$

و بالتالي :

$$\overline{\psi_1(t)} = \overline{\psi_1(\tau)} = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^n + F_n \cdot \tau^n \quad (17)$$

حيث :

$$W_n = \sum_{k=n}^{\infty *} C_k^{\frac{k-n}{4}} \cdot m^{\frac{k-n}{4}} \cdot A_k^{(1)} \quad (18)$$

$$G_n = \sum_{k=\frac{n+4\alpha}{3}}^{\infty *} C_k^{\frac{k+n}{4}} \cdot m^{\frac{k+n}{4}} \cdot A_k^{(1)} \quad (19)$$

- -

$$F_n = \sum_{k=n-4E\left(\frac{n-1}{4}\right)}^{n*} C_{-k}^{\frac{n-k}{4}} \cdot m^{\frac{n-k}{4}} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot B_k^{(1)} \quad (20)$$

أما القيمة الحدودية للتابع  $t\overline{\varphi_1'(t)}$  على  $L_1$  فيمكن كتابتها بالشكل :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{A}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^k \\ \varphi_1'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{k}{A}\right) \cdot \left(\frac{t}{A}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{A}\right) \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^{k+1} \\ \varphi_1'(t) &= \frac{a_1^{(1)}}{A} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}^{(1)} \cdot \left(\frac{k+1}{A}\right) \cdot \left(\frac{t}{A}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^3 \cdot b_{k-1}^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k-1}{A}\right) \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^k \\ \delta_k^3 &= \begin{cases} 0 & \text{when } n=1 \\ 1 & \text{when } n \neq 1 \end{cases} \quad \text{حيث :} \end{aligned}$$

وبعد الأخذ بالحسبان العلاقة (10) ، وإجراء بعض العمليات البسيطة نحصل على :

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \varphi_1'(\tau) = \frac{a_1^{(1)}}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \tau^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^3 \cdot T_n \cdot \tau^{-n} \\ \overline{\varphi_1'(t)} &= \overline{\varphi_1'(\tau)} = \frac{a_1^{(1)}}{A} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \tau^n - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^3 \cdot T_n \cdot \tau^n \\ t\overline{\varphi_1'(t)} &= \left[ A \left( \tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \right] \overline{\varphi_1'(\tau)} = \\ (21) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_n^1 \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + A \cdot m \cdot D_{n+3} - A \cdot m \cdot T_{n+3}] \cdot \tau^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^6 \cdot A \cdot m \cdot L_{n-3} + \delta_n^4 \cdot A \cdot m \cdot D_{3-n} - \delta_n^1 \cdot A \cdot m \cdot T_{3-n}] \cdot \tau^{-n} + \\ &+ A \cdot L_1 + A \cdot m \cdot D_3 - A \cdot m \cdot T_3. \end{aligned}$$

- -

حيث :

$$\delta_n^3 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1 \\ 1 & \text{when } n \neq 1 \end{cases} \quad \delta_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1,2 \\ 1 & \text{when } n \geq 3 \end{cases} \quad \delta_n^1 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq 1 \\ 1 & \text{when } n=1 \end{cases}$$

$$\delta_n^5 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq 3 \\ 1 & \text{when } n=3 \end{cases} \quad \delta_n^4 = \begin{cases} 0 & \text{when } n > 2 \\ 1 & \text{when } n \leq 2 \end{cases} \quad \delta_n^6 = \begin{cases} 0 & \text{when } n < 4 \\ 1 & \text{when } n \geq 4 \end{cases}$$

$$L_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{k+1}{A} \right) \cdot C_k^{\frac{k-n}{4}} \cdot m^{\frac{k-n}{4}} \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (22)$$

$$D_n = \sum_{k=\frac{n+4\alpha}{3}}^{\infty} \left( \frac{k+1}{A} \right) C_k^{\frac{k+n}{4}} \cdot m^{\frac{k+n}{4}} \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (23)$$

$$T_n = \sum_{k=n-4E\left(\frac{n-1}{4}\right)}^n \left( \frac{k-1}{A} \right) \cdot C_{-k}^{\frac{n-k}{4}} \cdot m^{\frac{n-k}{4}} \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^{k-1} \cdot b_{k-1}^{(1)} \quad (24)$$

وبتعويض (16,17,21) في (6) ، وبمقارنة المتحولات أو المتغيرات ذات الأس المتساوي

بعضها مع بعض نحصل على مجموعتين من المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$H_n + \delta_n^1 \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + m \cdot A \cdot D_{n+3} - \\ - m \cdot A \cdot T_{n+3} + G_n + F_n = -\delta_n^1 \cdot A \cdot P_1 \quad (25)$$

$$M_n + S_n + A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^6 \cdot m \cdot A \cdot L_{n-3} + \delta_n^4 \cdot m \cdot A \cdot D_{3-n} - \\ - \delta_n^1 \cdot m \cdot A \cdot T_{3-n} + W_n = -\delta_n^5 \cdot m \cdot A \cdot P_1 \quad (26)$$

والحد الثابت :

$$a_0^{(1)} + A \cdot L_1 + A \cdot m \cdot D_3 - A \cdot m \cdot T_3 + A_0^{(1)} = C_1$$

للتعويض في الشرطين (8,7) ، نحتاج أيضاً لتشكيل التوابع  $(j=1,2)$   $\psi_j(z)$  ,  $\varphi_j(z)$

على المحيط  $L_2$  على شكل سلسلة قوى حدودها المتغيرة من الشكل  $\left( \frac{t}{R_2} \right)$  ، وبعد إجراء

بعض التشكيلات الرياضية المعروفة والتي تمت في عدد من الأبحاث المنشورة سابقاً للباحث  
 [مجلة جامعة البعث:المجلد 19- العدد 4 -1997] ، يمكننا أن نكتب :

$$\varphi_1(t) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^n \quad (27)$$

$$\overline{\psi_1(t)} = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n \quad (28)$$

$$\begin{aligned} t\overline{\varphi_1'(t)} &= 2a_2^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^1 \cdot a_n^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot a_{n+2}^{(1)} \left(\frac{R_2}{A}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\varphi_2(t) = a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \left(\frac{t}{R_2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^n \quad (30)$$

$$\overline{\psi_2(t)} = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n \quad (31)$$

$$\begin{aligned} t\overline{\varphi_2'(t)} &= 2a_2^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^1 \cdot a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^n. \end{aligned} \quad (32)$$

وبتعبير العلاقات (27-32) في (8,7) ، وبمقارنة المتحولات ذات الأس المتساوي بعضها  
 مع بعض نحصل على أربع مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية وهي :

$$\begin{aligned}
& \chi_1 \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} - \delta_n^1 \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(1)} - B_n^{(1)} - \\
& - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \left[ \chi_2 \cdot a_n^{(2)} - \delta_n^1 \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-2} b_{n-2}^{(2)} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n B_n^{(2)} \right] = \\
& = 2 \cdot \delta_n^1 \cdot \mu_1 \cdot \delta R_2 \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_1 \cdot b_n^{(1)} - (n+2) \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(1)} - \left(\frac{R_2}{A}\right)^n A_n^{(1)} - \\
& - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \left[ \chi_2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n b_n^{(2)} - (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} - A_n^{(2)} \right] = 0 \tag{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^1 \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} - \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(1)} + B_n^{(1)} - \\
& - (1 + \delta_n^1) \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-2} b_{n-2}^{(2)} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot B_n^{(2)} = 0 \tag{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_n^{(1)} + (n+2) \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(1)} + \left(\frac{R_2}{A}\right)^n A_n^{(1)} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n b_n^{(2)} - \\
& - (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} - A_n^{(2)} = 0 \tag{36}
\end{aligned}$$

والحدود الثابتة :

$$\chi_1 \cdot a_0^{(1)} - 2 \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^2 \cdot a_2^{(2)} - A_0^{(1)} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \cdot [\chi_2 \cdot a_0^{(2)} - 2 \cdot a_2^{(2)} - A_0^{(2)}] = 0$$

$$a_0^{(1)} + 2 \cdot a_2^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^2 + A_0^{(1)} - a_0^{(2)} - 2 a_2^{(2)} - A_0^{(2)} = 0$$

- -

وللتعويض في الشرط (9) ، نحتاج أيضا لتشكيل التتابع  $\psi_j(z), \varphi_j(z)$  ( $j=1,2$ ) على المحيط  $L_3$  على شكل سلسلة قوى حدودها المتغيرة من الشكل  $\left(\frac{t}{R_1}\right)$  ، وبعد إجراء

بعض التشكيلات الرياضية البسيطة [6] ، يمكننا أن نكتب :

$$\varphi_2(t) = a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_1}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} \left(\frac{R_1}{t}\right)^n \quad (37)$$

وبالتالي:

$$\overline{\psi_2(t)} = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{R_1}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \left(\frac{t}{R_1}\right)^n \quad (38)$$

$$\begin{aligned} t \overline{\varphi_2'(t)} &= 2 \cdot a_2^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^1 \cdot a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_1}\right)^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{R_1}{t}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(2)} \cdot \left(\frac{t}{R_1}\right)^n. \end{aligned} \quad (39)$$

وبتعويض (37-39) في (9) ، وبمقارنة المتحولات ذات الأس المتساوي بعضها مع بعض نحصل على مجموعتين من المعادلات الجبرية الخطية :

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^1 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} - \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(2)} + B_n^{(2)} = -\delta_n^1 \cdot R_1 \cdot P_2 \quad (40)$$

$$b_n^{(2)} + (n+2) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(2)} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot A_n^{(2)} = 0 \quad (41)$$

والحد الثابت :

$$a_0^{(2)} + 2 a_2^{(2)} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + A_0^{(2)} = C_2$$

وبالتالي نحصل على (8) مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية  
 . (25,26,33,34,35,36,40,41)

### التطبيق العملي :

للحصول على نتائج عددية للمسألة المدروسة تم وضع برنامج عام بلغة Visual Basic 6.0 يسمح لنا بإدخال الأبعاد الهندسية  $(R_1; R_2; A)$  والخواص الفيزيائية  $\mu_j, \chi_j (j=1,2)$  وقيمة الضغط الخارجي  $P_1$  والداخلي  $P_2$  والتداخل القسري  $\delta R_2$  ، و ذلك بأخذ أي عدد  $(N)$  من الحدود المطلوبة من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية الثمانية (25,26,33,34,35,36,40,41) و بالتالي الحصول على  $(8 \times N)$  معادلة جبرية خطية لحساب معاملات سلسلة القوى " الأمثال الثابتة "  $a_n^{(j)}, A_n^{(j)}, b_n^{(j)}, B_n^{(j)}, (j=1,2; n=1 \rightarrow N)$  ، والتي بحسابها نستطيع تعيين التوابع العقدية التحليلية  $(j=1,2)$   $\varphi_j(z), \psi_j(z)$  ، في كل مجال  $S_j (j=1,2)$  ، ومن ثم حساب الإجهادات  $(\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy})$  في نقاط محددة  $(z)$  واقعة على المحور  $ox$  وفق العلاقة (1) .

ولحل مثال تطبيقي تم إدخال المعطيات التالية:

$$R_1=1cm; \quad R_2=2cm; \quad a=5cm; \quad m=-\frac{1}{9}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 7.9462.10^4 MPa; \quad \chi_1 = \chi_2 = 2.2 \quad \text{" فولاذ "}$$

أما في إدخال القوى الخارجية و الداخلية  $(P_1; P_2)$  فقد تم إعطاء كل منها قيمة واحدة القوى وللتداخل القسري  $(\delta R_2)$  واحدة الطول واستخدم تأثير كل منها بشكل منفرد للحصول على وضوح في النتائج .

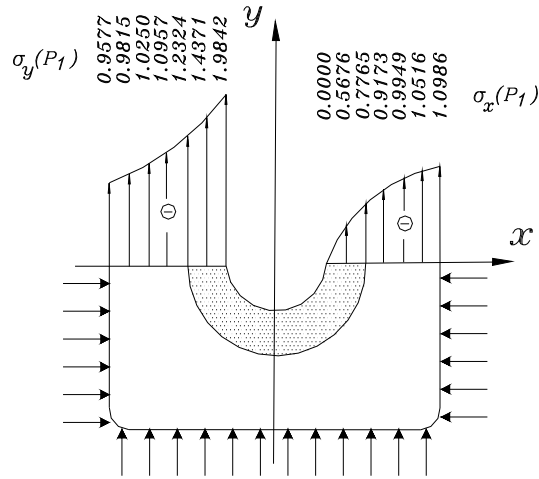
وبأخذ الحدود العشرة الأولى  $N = 10$  من كل من المجموعات الخطية الثمانية نحصل على (80) معادلة جبرية خطية تم حلها وحساب المعاملات الثابتة وتعيين توابع الإجهادات



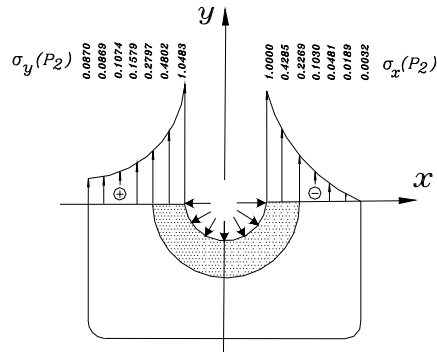
وقيم الإجهادات في نقاط محددة ، واقعة على المحور الحقيقي  $ox$  ، وللتوضيح نظمت تلك القيم ضمن الجدول (1) ، و رسمت مخططات الإجهادات الموافقة ، [ الأشكال (3-4) ] .

الجدول ( 1 ) يبين قيم الإجهادات  $(\sigma_x ; \sigma_y)$  بدلالة كل من  $(\mu_1 \cdot \delta R_2 ; P_2 ; P_1)$

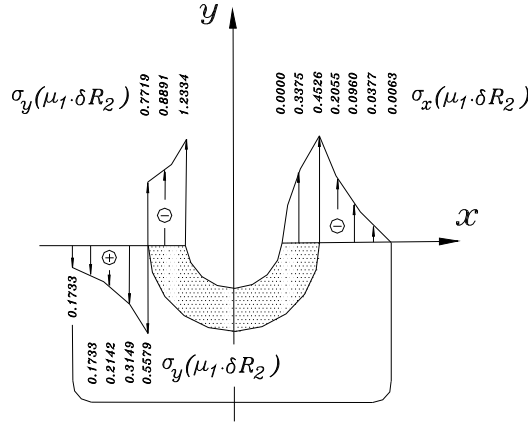
$Z$	$\sigma_x$			$\sigma_y$		
	$P_1$	$P_2$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$	$P_1$	$P_2$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$
$R_1$	-0.0000	-1.0000	-0.0000	-1.9842	+1.0483	-1.2334
$0.5(R_2 + R_1)$	-0.5676	-0.4285	-0.3375	-1.4371	+0.4802	-0.8891
$R_2$	-0.7765	-0.2269	-0.4526	-1.2324	+0.2797	-0.7719 +0.5579
$0.25(a + 3R_2)$	-0.9173	-0.1030	-0.2055	-1.0957	+0.1579	+0.3149
$0.5(a + R_2)$	-0.9949	-0.0481	-0.0960	-1.0250	+0.1074	+0.2142
$0.25(3.a - R_2)$	-1.0516	-0.0189	-0.0377	-0.9815	+0.0869	+0.1733
$a$	-1.0986	-0.0032	-0.0063	-0.9577	+0.0870	+0.1736



الشكل (2) مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  تحت تأثير القوة الخارجية  $P_1$



الشكل (3) مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  تحت تأثير القوة الداخلية  $P_2$



الشكل (4) مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  تحت تأثير التداخل القسري  $\delta R_2$

### النتائج :

- يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي :
- في هذا البحث وجدنا أنه بالإمكان استخدام طريقة المتغيرات العقدية لتعيين الإجهادات في إحدى مسائل المرونة الحدودية المستوية .
  - باستخدام التصوير أو التمثيل المطابق نستطيع تحويل الكنتور  $L_1$  والذي هو عبارة عن مربع واقع في المستوى العقدي ( $Z$ ) إلى دائرة الوحدة ( $\gamma$ ) الواقعة في المستوى العقدي المساعد ( $\zeta$ ) وذلك لنتمكن من استخدام منشور سلسلة لورانت " Laurent Series".
  - من الشروط الحدودية " طرفية و تلامسية " تم تحديد المعاملات " Coefficients " أو الحدود الثابتة لمنشور سلسلة لورانت و الضرورية لتعيين توابع الإجهادات .

- عدد حدود منشور سلسلة لوراننت ( $N$ ) يتعلق بدقة الحل المطلوبة ويرتبط بشكل أساسي بالشكل الهندسي للمسألة المدروسة ، وفي المثال التطبيقي وجد أن ( $N = 10$ ) تعطي نتائج ذات دقة كافية و قريبة جداً من الشروط الحدودية .
- لقد تم الحصول على قيم الإجهادات ( $\sigma_x ; \sigma_y$ ) بدلالة ( $\mu_1 \cdot \delta R_2 ; P_2 ; P_1$ ) باستخدام مبدأ تراكم القوى وذلك ليتسنى لنا مقارنة النتائج وسهولة تحليلها ، كما أن البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة " Visual Basic 6.0 " هو برنامج عام نستطيع من خلاله حل المعادلات الناتجة عن تحديد قيمة اختيارية لـ ( $N$ ) ، وبالتالي تعيين قيم المعاملات الثابتة لسلسلة القوى ، ومن ثم حساب قيم الإجهادات في نقاط محددة في المسألة المدروسة والتي يمكن تغيير أبعادها الهندسية.
- إن قيم الإجهادات التي تم الحصول عليها نظمت ضمن جداول ومخططات ليسهل استخدامها .

## References

- 1- S. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1970.
- 2- I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1956.
- 3- N.J. Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Goningen, 1953.
- 4- L. Lapidus and G.F. Pinder, Numerical Solutions of Partial Differential Equations in Science and Engineering. Wiley. New York, 1982.
- 5- P.K. Banerjee and R. Butterfield, Boundary Elements in Engineering Science. McGraw-Hill, New Jersey, 1996.
- 6- Savin, G.N. Stress Concentration around Holes. Pergamon Press, London, 1961.
- 7- Sherman, D.I. on a method of solution of static problem of stresses in plane multiply connected regions, Sciences RSS 1934 pp.376-414.
- 8- Ballarini, R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface. Eng. Fract. Mcha.37, 1-5.1998.
- 9- Amenzade, U.A. Theory of elasticity. High School, Moscow, 271P. 1967.
- 10- Bahteyarof, U.A. on the torsion of prismatic beam with a doubly connected domain. Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series, no.4, 32-36.1972.
- 11- Parton, B.Z. and Perlin, P.U. integral equations of the theory elasticity. Nauka, Moscow, 331 P.1977.
- 12- Bathe, K. j. Finite element procedure in engineering analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.
- 13- Markushevich, A.I., The Theory of Analytic Functions. Mir, Moscow, 1983.
- 14- Brebbia, C.A. The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, 1980.
- 15- Candra, A & Mukherjee, A. M. Boundary Element Method in Manufacturing. Oxford University press, New York, 1997.
- 16- Hromadka, T.V & Lai, C. The Complex Variable Boundary Element Method in Engineering Analysis. Springer-Verlag, 1986.
- 17- Bosakov, S.V. Prikl. Mekh. 16, 81-87, 1980.
- 18- Pak, R.Y.S & Gobert, A.T. On the axisymmetric interaction of a rigid disc with a semi-infinite solid. J. Appl. Math. Physics (ZAMP) 41, 684-700, 1990.
- 19- Ihssan Tarsha, Numerical method analysis For solution an elasticity problem, Journal of AL-Baath University, Vol.23, 2001.
- 20- Ihssan Tarsha, Stress distribution in a thick -walled cylinder with tow circular holes under torsion moment, Journal of AL-Baath University, Vol.19, 2001.