

**USING THE COMPLEX FUNCTIONS TO COMPUTE  
THE STRESSES IN A PLATE INTERCONNECTED BY FORCE**

**Dr. Eng. IHSSAN TARSHA  
CIVIL ENG. ALBAATH UNIVERSITY**

## **Abstract**

With Wide Spread Of The Computers, Many Researchers Tried To Fined Numerical Methods To Solve The Problems Of The Theory Of Elasticity Instead Of The Difficult Mathematical Integrations. These Methods Include The Finite Element, The Finite Difference, And The Complex Potential (Complex Functions), And They Have Many Applications In Solving The Problems Of The Theory Of Elasticity, Specially In The Contact Problems .

This paper discusses the possibility solution of the plane problem of elasticity theory by means of a complex variable to compute stresses in a circular plate, compound from tree region ,composed of various materials interconnected by force and submitted to uniform external or internal compression ,this plate ,as one of the designee methods for increasing strength.

This method is used in making high - pressure apparatuses and in military industry to make artillery's barrel more strength ... etc .

استخدام التوابع العقدية لحساب الإجهادات  
في صفيحة مجمعة بالتداخل القسري

الدكتور المهندس  
إحسان الطرشه  
هندسة مدنية - جامعة البعث

ملخص البحث :

مع ظهور الآلات الحاسبة الإلكترونية اتجه العديد من الباحثين إلى إيجاد طرق عددية لحل مسائل نظرية المرونة عوضاً عن التكاملات الرياضية الصعبة والمعقدة ، ومن تلك الطرق المستعملة نذكر طريقة العناصر المحدودة والفروقات المنتهية وطريقة الكمون العقدي " توابع المتغير العقدي " التي لاقت انتشاراً واسعاً في حل مسائل نظرية المرونة وخاصة في المسائل الحدودية " التلامسية " .

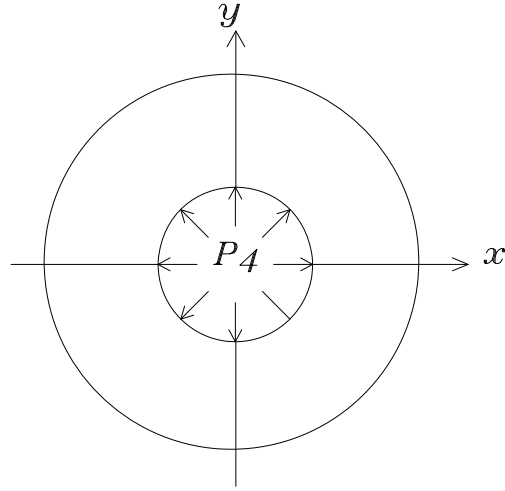
ويتناول البحث إمكانية حل مسألة مستوية في نظرية المرونة باستخدام توابع المتغير العقدي ، والمسألة هي حساب الإجهادات في صفيحة دائرية مركبة من ثلاثة أجزاء، مكونة من مواد مختلفة ، ومجمعة بالتداخل القسري ، ومعرضة لضغط داخلي أو خارجي موزع بانتظام ، وهي تعتبر إحدى الحلول الهندسية التصميمية، لزيادة المتانة، وهذا الحل يستعمل في صناعة أجهزة الضغط العالي ، والصناعات الحربية لتمتين سبطانات المدافع الضخمة وغيرها .

INTRODUCTION:

المقدمة :

إن مسألة تعيين الإجهادات والانتقالات في الاسطوانة ثخينة الجدران تدعى مسألة لامي ( LAME ) نسبة للعالم الفرنسي الذي عاش في القرن الماضي والذي حل هذه المسألة ووجد أنه في اسطوانة نصف قطرها الداخلي a والخارجي b ومعرضة لضغط داخلي p ، الشكل (1) ، قيمة الإجهادات المحيطة عند السطح الداخلي تساوي :

$$\sigma_{\theta} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$$



الشكل (1)

وقيمة الإجهاد القطري عند السطح الداخلي وتساوي :  $\sigma_r = -p$

وحسب نظرية المتانة الثالثة فإن الإجهاد المكافئ :  $\sigma_{eq} = p \cdot \frac{2 \cdot b^2}{b^2 - a^2}$

وإذا فرضنا أن ثخانة الأسطوانة لانهائية أي :  $b \rightarrow \infty$

فإن  $\sigma_{eq} = 2p$

ويمكن تفسير العلاقة الأخيرة التي حصلنا عليها بالشكل التالي :

إذا كان حد المرونة لمادة على سبيل المثال  $(\sigma_e = 6.10^3 \text{ Kg/Cm}^2)$  وكانت ثخانة الأسطوانة كبيرة ، فإن التشوهات تبقى مرنة ما لم يزيد الضغط الداخلي عن  $(3.10^3 \text{ Kg/Cm}^2)$  ، فإذا طلب تحمل ضغط عال  $(15.10^3 \text{ Kg/Cm}^2)$  فإن ذلك يتطلب عامل مرونة للمعدن لا تقل عن  $(\sigma_e = 30.10^3 \text{ Kg/Cm}^2)$  ، إلا أنه في عصرنا الحاضر لا توجد مواد على هذه الدرجة من المتانة ، لذا يلزمنا لأوعية الضغط العالي ، البحث عن حلول هندسية تصميمية جديدة وأحد هذه الحلول هو استخدام الأنابيب المركبة " المجمععة " بالتداخل القسري والذي كان أول من اقترحه العالم الروسي (A.B.GADALUN) .

## هدف البحث وطريقته :

في هذا البحث سوف نعالج مسألة توزيع الإجهادات بصفيحة دائرية مركبة " مجمعة " الشكل (2) ، مكونة من ثلاثة مجالات  $S_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) مؤلفة من مواد مختلفة معاملات القص وثابت المرونة الموافقة هي  $\chi_j$  ,  $\mu_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) وتخضع لضغط داخلي  $P_3$  وخارجي  $P_1$  موزعين بانتظام .

ويمكن التعبير عن تابع الإجهادات  $U_j(x, y)$  في كل مجال  $S_j$  بتابعين عقديين  $\varphi_j(Z)$  ,  $\psi_j(Z)$  وفق العلاقة التالية [3] :

$$U_j = \text{Re} \{ \bar{Z} \cdot \varphi_j(Z) + \psi_j(Z) \} \quad (j = 1 \rightarrow 3) \quad \text{حيث :}$$

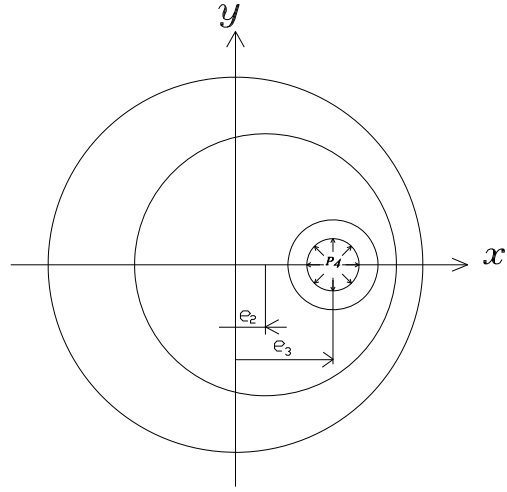
Re : يرمز للجزء الحقيقي ;  $\bar{Z} = x - iy$  ;  $Z = x + iy$  .

$\varphi_j(Z)$  ,  $\psi_j(Z)$  هي توابع عقدية تحليلية سيجري اختيارها على شكل سلسلة قوى [2] .  
وبما أنه يمكن التعبير عن مركبات الإجهادات والانتقالات بواسطة تابع الإجهادات  $U_j(x, y)$  ، إذاً يمكن أن نعبر عن مركبات الإجهادات والانتقالات بواسطة التوابع  $\varphi_j(Z)$  ,  $\psi_j(Z)$  في كل مجال من المجالات  $S_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) .

وبالتالي فإن حل المسألة المذكورة يتم بالبحث عن ثلاثة أزواج من التوابع العقدية  $\varphi_j(z)$  ,  $\psi_j(z)$  , ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) التحليلية والمنتظمة في المجالات  $S_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) ، والتي نفرضها بالشكل التالي [2] :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1(z) \\ \psi_1(z) \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_k^{(1)} \\ A_k^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \frac{Z}{r_1} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} b_k^{(1)} \\ B_k^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \frac{r_2}{Z - e_2} \right)^k \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2(z) \\ \psi_2(z) \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_k^{(2)} \\ A_k^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{Z - e_2}{r_2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} b_k^{(2)} \\ B_k^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{r_3}{Z - e_3} \right)^k \quad (2)$$



الشكل (2)

$$\begin{cases} \varphi_3(z) \\ \Psi_3(z) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_k^{(3)} \\ A_k^{(3)} \end{Bmatrix} \left( \frac{z - e_3}{r_3} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} b_k^{(3)} \\ B_k^{(3)} \end{Bmatrix} \left( \frac{r_4}{z - e_3} \right)^k \quad (3)$$

حيث:

هي المقادير الثابتة المجهولة والتي يطلب تحديد قيمتها وتسمى بمعاملات سلسلة القوى .

إن التوابع العقدية المفروضة يجب أن تحقق الشروط الطرفية والتلامسية التالية [3] :

على المحيط  $L_1$  لدينا :

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = -P_1 t + C_1 \quad (4)$$

على المحيط  $L_2$  لدينا :

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mu_1} [\chi_1 \varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] - \frac{1}{\mu_2} [\chi_2 \varphi_2(t) - t \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)}] = 2g_2(t) \quad (6)$$

على المحيط  $L_3$  لدينا :

$$\varphi_2(t) + t \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = \varphi_3(t) + t \overline{\varphi_3'(t)} + \overline{\psi_3(t)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_2} [\chi_2 \varphi_2(t) - t \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)}] - \frac{1}{\mu_3} [\chi_3 \varphi_3(t) - t \overline{\varphi_3'(t)} - \overline{\psi_3(t)}] = 2g_3(t) \quad (8)$$

على المحيط  $L_4$  لدينا :

$$\varphi_3(t) + t \overline{\varphi_3'(t)} + \overline{\psi_3(t)} = -P_4 t(t - e_3) + C_4 \quad (9)$$

حيث :

$t$  - دليل النقاط على المحيط  $L_j$  ( $j = 1 \rightarrow 4$ )

$\chi_j$  - ثوابت المرونة وتعطى بالعلاقة :

$$\chi_j = (3 - v_j) \cdot (1 + v_j)^{-1} ; (j = 1 \rightarrow 3)$$

$v_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) - معامل بواسون .

$g_j(t)$  - تابع معلوم ويعبر عن التغير الحاد " القفزة " في شعاع الانتقال على المحيط  $L_j$

$$\text{ويساوي : } \frac{\delta r_j}{r_j} t \quad (j = 2, 3)$$

$\delta r_j$  ( $j = 2, 3$ ) - قيمة التداخل القسري " التوتر " .

$C_j$  ( $j = 1, 4$ ) - ثوابت تحدد أثناء حل المسألة .

$\mu_j$  ( $j = 1 \rightarrow 3$ ) - ثوابت لامي وهي معاملات فيزيائية تتعلق بالمادة وتتطابق مع معاملات

القص  $G$  .

إن العلاقتين (4) و (9) تستندان على مبدأ استمرارية مركبات الإجهادات ضمن المجال

$S_j$  ( $j = 1, 4$ ) وحتى المحيط  $L_j$  ( $j = 1, 4$ ) ، وتمثلان شروطاً طرفية " حدودية - محيطية " ،

وتعبران عن تساوي قيم التوابع " الطرف الأيسر من العلاقتين " في كل نقطة  $(t)$  على

المحيط  $L_j$  ( $j = 1, 4$ ) ، مع قيم القوى الخارجية " الطرف الأيمن " المطبقة في النقطة  $(t)$  .

والعلاقتين (5) و (7) تستندان على مبدأ الفعل ورد الفعل ، وتعبران عن استمرارية

الإجهادات بين المجالات " المناطق - الأجزاء " ( $S_1$  و  $S_2$ ) وكذلك بين ( $S_2$  و  $S_3$ ) .

والعلاقتين (6) و (8) تعتمدان على شروط عدم وجود انزلاق بين الأجزاء المتلامسة

( $S_1$  و  $S_2$ ) ، وكذلك بين ( $S_2$  و  $S_3$ ) ، بالنسبة لمماسات المحيطين  $L_2$  و  $L_3$  .

وتعبران عن قيمة القفزة المرنة في شعاع الانتقال " قيمة التداخل القسري " باتجاه النواظم على

كل من  $L_2$  و  $L_3$  ، علماً أن قيمة القفزة " التوتر " معلومة و ثابتة في كل نقطة  $(t)$  على كل من

المحيطين  $L_2$  و  $L_3$  [6] .

وتعويض القيمة الحدية للتوابع (3 - 1) في الشروط (9 - 4) وإجراء عدد من العمليات

الرياضية تمكنا من مقارنة العوامل المتغيرة المتشابهة وذات الأس المتساوي مع بعضها لبعض

فإننا نحصل على (12) مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية .

وللتوضيح سوف نجري بعض العمليات الرياضية في إعادة تشكيل قيمة التابع  $\varphi_1(z)$

على المحيط  $L_1$  بشكل سلسلة قوى المعامل المتغير فيها  $\left(\frac{t}{r_1}\right)$  آخذين بعين الاعتبار

$$\text{أن : } \left| \frac{e_2}{t} \right| < 1$$

إن الحد الأول من العلاقة (1) لا نجري عليه أي تعديل ولكن الحد الثاني يأخذ الشكل

التالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{t - e_2} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot \left( \frac{r_1}{t} \right)^k \cdot \left( 1 - \frac{e_2}{t} \right)^{-k}$$

وبما أن :

$$\left( 1 - \frac{e_2}{t} \right)^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \cdot C_{-k}^v \cdot \left( \frac{e_2}{t} \right)^v$$

و بالتعويض نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{t - e_2} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v C_{-k}^v \cdot \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^v \cdot \left( \frac{r_1}{t} \right)^{k+v}$$

نرمز لـ  $vk + n$  وبالتالي

$$= n - kv \Rightarrow v n = k +$$

وباعتبار أن :

$$C_{-k}^v = (-1)^v \cdot C_{k+v-1}^v$$

نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{t - e_2} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}^{n-k} \cdot \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{n-k} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n$$

ولكن [1] :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots - \sum_{n=k}^{\infty} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \dots - \sum_{k=1}^n \dots$$

إذاً :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{r_2}{t - e_2} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n$$

حيث :

$$I_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{n-k} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot b_k^{(1)}$$

وبالتالي التابع  $\varphi_1(z)$  على  $L_1$  يأخذ الشكل التالي :

$$\varphi_1(t) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \left( \frac{t}{r_1} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n \quad (10)$$

و بشكل مشابه يأخذ التابع  $\psi_1(z)$  قيمته الحدية على  $L_1$  .

$$\psi_1(t) = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \left( \frac{t}{r_1} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(1)} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n$$

حيث :

$$L_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{n-k} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot B_k^{(1)}$$

وبالتالي :

$$\overline{\psi_1(t)} = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{(1)} \left( \frac{t}{r_1} \right)^n \quad (11)$$

وللتعويض في المعادلة (1) يلزمنا أيضاً حساب  $t \varphi_1'(t)$  .

$$\varphi_1'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \left( \frac{n}{r_1} \right) \cdot \left( \frac{t}{r_1} \right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \left( \frac{n}{r_1} \right) \cdot \left( \frac{r_1}{t} \right)^{n+1}$$

$$\overline{\varphi_1'(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \left( \frac{n}{r_1} \right) \cdot \left( \frac{r_1}{t} \right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \left( \frac{n}{r_1} \right) \cdot \left( \frac{t}{r_1} \right)^{n+1}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} t \overline{\varphi_1'(t)} &= 2a_2^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(1)} \cdot a_n^{(1)} \cdot \left( \frac{t}{r_1} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_{n+2}^{(1)} \left( \frac{r_1}{t} \right)^n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(2)} (n-2) I_{n-2}^{(1)} \cdot \left( \frac{t}{r_1} \right)^n \end{aligned} \quad (12)$$

حيث أن :



$$\varepsilon_n^{(1)} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = \begin{cases} 1 & n \geq 1 \\ 0 & n = 1, n \end{cases}$$

وبتعويض كل من المعادلات (10-12) في الشروط الطرفية (4) على المحيط  $L_1$  نجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (1 + \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(2)} (n-2) l_{n-2}^{(1)} + L_n^{(1)} \right] \left( \frac{t}{r_1} \right)^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+2) a_{n+2}^{(1)} + l_n^{(1)} + A_n^{(1)} \right] \cdot \left( \frac{r_1}{t} \right)^n + a_0^{(1)} +$$

$$+ 2a_2^{(1)} + A_0^{(1)} = -P_1 \cdot r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(1)} \cdot \left( \frac{t}{r_1} \right)^n + C_1$$

وبمقارنة العوامل المتغيرة وذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على المعادلات

الثلاث التالية :

$$(1 + \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(2)} (n-2) l_{n-2}^{(1)} + L_n^{(1)} = -\varepsilon_n^{(1)} r_1 P_1 \quad (13)$$

$$l_n^{(1)} + (n+2) a_{n+2}^{(1)} + A_n^{(1)} = 0 \quad (14)$$

والحد الثابت  $C_1$  يعطى بالعلاقة :

$$a_0^{(1)} + 2a_2^{(1)} + A_0^{(1)} = C_1$$

وهكذا بإجراء عدد مشابه من العمليات الرياضية وتشكيل القيمة الحدية للتتابع

$\varphi_j(z)$ ,  $z \overline{\varphi_j(z)}$ ,  $\overline{\psi_j(z)}$ , ( $j=1 \rightarrow 3$ ) على المحيط  $L_j$  ( $j=2-4$ ) على شكل

سلسلة قوى أساسها المتحولات  $\left( \frac{t-e_2}{r_2} \right)$ ,  $\left( \frac{t-e_3}{r_3} \right)$ ,  $\left( \frac{t-e_3}{r_4} \right)$  على التوالي ،

وبتعويض القيم الحدية لتلك التتابع في الشروط الطرفية المرافقة (2-9) ، وبمقارنة المتحولات

ذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$(1 + \varepsilon_n^{(1)}) h_n^{(1)} - (n-1) \cdot \left( \frac{e_2}{r_2} \right) b_{n-1}^{(1)} - \varepsilon_n^{(2)} (n-2) b_{n-2}^{(1)} + B_n^{(1)} - (1 + \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(2)} +$$

$$+ (n-1) \cdot \left( \frac{e_2}{r_2} \right) l_{n-1}^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)} (n-2) l_{n-2}^{(2)} - L_n^{(2)} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$(n+1) \cdot \left( \frac{e_2}{r_2} \right) h_{n+1}^{(1)} + (n+2) h_{n+2}^{(1)} + b_n^{(1)} + H_n^{(1)} - (n+1) \cdot \left( \frac{e_2}{r_2} \right) a_{n+1}^{(2)} -$$

$$- (n+2) a_{n+2}^{(2)} - l_n^{(2)} - A_n^{(2)} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned}
& (\chi_1 - \varepsilon_n^{(1)}) h_n^{(1)} + (n-1) \cdot \left(\frac{e_2}{r_2}\right) b_{n-1}^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)} (n-2) b_{n-2}^{(1)} - \\
& - B_n^{(1)} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ (\chi_2 - \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(2)} + (n-1) \cdot \left(\frac{e_2}{r_2}\right) l_{n-1}^{(2)} + \right. \\
& \left. + \varepsilon_n^{(2)} \cdot (n-2) l_{n-2}^{(2)} - L_n^{(2)} \right] = 2 \varepsilon_n^{(1)} \mu_1 \delta r_2 \dots \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+1) \cdot \left(\frac{e_2}{r_2}\right) h_{n+1}^{(1)} - (n+2) h_{n+2}^{(1)} + \chi_1 b_n^{(1)} - H_n^{(1)} + \\
& + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ (n+1) \cdot \left(\frac{e_2}{r_2}\right) a_{n+1}^{(2)} + (n+2) a_{n+2}^{(2)} - \chi_2 l_n^{(2)} + A_n^{(2)} \right] = 0 \dots \dots \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + \varepsilon_n^{(1)}) h_n^{(2)} - (n-1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) b_{n-1}^{(2)} - \varepsilon_n^{(2)} (n-2) b_{n-2}^{(2)} + B_n^{(2)} - \\
& - (1 + \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(3)} + (n-1) \cdot \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) b_{n-1}^{(3)} + \\
& + \varepsilon_n^{(2)} (n-2) \cdot \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{n-2} \cdot b_{n-2}^{(3)} - \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^n \cdot B_n^{(3)} = 0 \quad \dots \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n+1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) h_{n+1}^{(2)} + (n+2) h_{n+2}^{(2)} + b_n^{(2)} + H_n^{(2)} - \\
& (n+1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) a_{n+1}^{(3)} - (n+2) a_{n+2}^{(3)} - \left(\frac{r_4}{r_3}\right) b_n^{(3)} - B_n^{(3)} = 0 \quad \dots \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\chi_2 - \varepsilon_n^{(1)}) h_n^{(2)} + (n-1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) b_{n-1}^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)} (n-2) b_{n-2}^{(2)} - \\
& - B_n^{(2)} - \frac{\mu_2}{\mu_3} \left[ (\chi_3 - \varepsilon_n^{(1)}) a_n^{(3)} + (n-1) \cdot \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) \cdot b_{n-1}^{(3)} + \right. \\
& \left. + \varepsilon_n^{(2)} \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^{n-2} \cdot b_{n-2}^{(3)} - \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^n \cdot B_n^{(3)} \right] = 2 \varepsilon_n^{(1)} \mu_2 \delta r_3 \dots \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n+1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) h_{n+1}^{(2)} - (n+2) h_{n+2}^{(2)} + \chi_2 b_n^{(2)} - \\
& H_n^{(2)} + \frac{\mu_2}{\mu_3} \left[ (n+1) \cdot \left(\frac{e_3}{r_3}\right) a_{n+1}^{(3)} + (n+2) a_{n+3}^{(3)} - \right. \\
& \left. - \chi_3 \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^n \cdot b_n^{(3)} + B_n^{(3)} \right] = 0 \quad \dots \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\left[ \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^n + \varepsilon_n^{(1)} \right] a_n^{(3)} - (n-1) \cdot \left( \frac{e_3}{r_4} \right) b_{n-1}^{(3)} +$$

$$+ \varepsilon_n^{(2)} (n-2) b_{n-2}^{(3)} + B_n^{(3)} = - \varepsilon_n^{(1)} \cdot r_4 P_4 \dots \dots \dots (23)$$

$$(n+1) \cdot \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^{n+1} \left( \frac{e_3}{r_3} \right) a_{n+1}^{(3)} + (n+2) \cdot \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(3)} +$$

$$+ b_n^{(3)} + \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^n \cdot A_n^{(3)} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

حيث أن :

$$h_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^n \cdot \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{k-n} \cdot a_k^{(1)}$$

$$H_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^n \cdot \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{k-n} \cdot A_k^{(1)}$$

$$h_n^{(2)} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^n \cdot \left( \frac{e_3 - e_2}{r_2} \right)^{k-n} \cdot a_k^{(2)}$$

$$H_n^{(2)} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^n \cdot \left( \frac{e_3 - e_2}{r_2} \right)^{k-n} \cdot A_k^{(2)}$$

$$l_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{n-k} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot b_k^{(1)}$$

$$L_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{e_2}{r_1} \right)^{n-k} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^k \cdot B_k^{(1)}$$

$$l_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^k \cdot \left( \frac{e_3 - e_2}{r_2} \right)^{n-k} \cdot b_k^{(2)}$$

$$L_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{n-k} \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^k \cdot \left( \frac{e_3 - e_2}{r_2} \right)^{n-k} \cdot B_k^{(2)}$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{when } n \geq 3 \\ 0 & \text{when } n = 1, 2 \end{cases}$$

$$\text{Combinsion } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

بأخذ المعادلات الخطية الخمسة الأولى (N=5) من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية اللانهائية البالغ عددها (12) ، (24 - 13) فإن عدد المعادلات الخطية الناتجة 5 = 60 ( 12 × ) ، وبالحل المشترك لتلك المعادلات بعد التعويض فيها بالأبعاد الهندسية وبمعاملات

المرونة الخاصة بكل جزء من أجزاء الصفيحة المجمعة ، وكذلك بقيمة التداخل القسري بين تلك الأجزاء وقيمة الضغوط الداخلية والخارجية يتم حساب قيم معاملات سلسلة القوى

$$. a_k^{(j)}, A_k^{(j)}, b_k^{(j)}, B_k^{(j)}, (j=1 \rightarrow 3, k=1 \rightarrow 5)$$

وبهذا تتعين لدينا التوابع العقدية  $(\varphi_j(z), \psi_j(z), (j=1 \rightarrow 3))$  ، وبتطبيق علاقة (G.V.Kolosoff-N.I.Muskhelishvili) العلاقة (23) ، [5] يتم تحديد قيمة الإجهادات

$$. \sigma_r^{(j)}, \sigma_\theta^{(j)}, \sigma_{r\theta}, (j=1 \rightarrow 3) \text{ في كل نقطة توافق قيمة محددة لـ } (z)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)} &= 2 \left[ \varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)} \right] \\ \sigma_\theta^{(j)} - \sigma_r^{(j)} + 2i \sigma_{r\theta} &= 2 \left[ \bar{z} \varphi_j''(z) + \psi_j'(z) \right] \cdot e^{2i\theta} \end{aligned} \right\} (j=1 \rightarrow 3)..(23)$$

حيث أن :  $\sigma_{r\theta}$  - الإجهاد المماسي ؛

$\sigma_r$  - الإجهاد القطري ؛  $\sigma_\theta$  - الإجهاد المحيطي .

### ملاحظة :

يستعمل مبدأ تراكم القوى عند تحديد الإجهادات في الصفيحة المركبة وذلك من تأثير الضغط الداخلي  $P_4$  والضغط الخارجي  $P_1$  والتداخل القسري  $\delta r_2, \delta r_3$  لإظهار تأثير كل منهم على توزع الإجهادات .

### تطبيق عددي :

في هذا التطبيق العددي سنقتصر على حساب الإجهادات  $(\sigma_\theta, \sigma_r)$  في الصفيحة المدروسة ، وذلك تحت تأثير ضغط داخلي  $P_4$  فقط وبغياب تام للتداخل القسري والضغط الخارجي.

فإذا عوضنا في كل من المجموعات الجبرية الخطية (24-13) بالأبعاد الهندسية النسبية بدلالة  $r_1$  .

$$r_2 = 0.5 r_1 ; r_3 = 0.25 r_1 ; r_4 = 0.15 r_1$$

$$e_2 = 0.15 r_1 ; e_3 = 0.25 r_1$$

وبمعاملات المرونة الخاصة بكل جزء  $S_j (j=1 \rightarrow 3)$  من أجزاء الصفيحة المجمعة.

$$\mu_1 = 3.773 \cdot 10^4 \text{ MPa} ; \chi_1 = 2.008 \quad \text{" نحاس "}$$

$$\mu_2 = 4.829 \cdot 10^4 \text{ MPa} ; \chi_2 = 1.969 \quad \text{" برونز "}$$

$$\mu_3 = 7.9462 \cdot 10^4 \text{ MPa} ; \chi_3 = 2.2 \quad \text{" فولاذ "}$$

.  $P_1 = 0$  وقيمة الضغط الداخلي والخارجي

.  $\delta r_2 = \delta r_3 = 0$  وقيمة التداخل القسري

وبأخذ الحدود الخمسة الأولى ( $N=5$ ) من كل من المجموعات الخطية نحصل على (60)

معادلة جبرية خطية ، وبالحل المشترك لها نوجد قيم معاملات سلسلة القوى " المقادير الثابتة "

$$. a_N^{(j)}, A_N^{(j)}, b_N^{(j)}, B_N^{(j)}, (j=1 \rightarrow 3, N=1 \rightarrow 5)$$

وبالتالي نعين التوابع العقدية في كل مجال ( $j=1 \rightarrow 3$ ) ،  $\varphi_j(z)$  ،  $\psi_j(z)$  ،

وبالتعويض بالعلاقة (23) بقيم محددة للنقاط  $z$  :

$$z_1 = -r_1 ; z_2 = e_2 - r_2 ; z_3 = e_3 - r_3 ; z_4 = e_3 - r_4$$

$$z_5 = e_3 + r_4 ; z_6 = e_3 + r_3 ; z_7 = e_2 + r_2 , z_8 = r_1$$

نحصل على قيم كل من  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  في تلك النقاط ، وقد رتبنا هذه القيم في الجدول (1)

ورسمنا مخططاتها كما هو موضح في الشكلين (3-4) .

النقطة (Z)	$-r_1$	$e_2 - r_2$	$e_3 - r_3$	$e_3 - r_4$	$e_3 + r_4$	$e_3 + r_3$	$e_2 + r_2$	$r_1$	الإجهاد
	0.0001	0.0729	0.2561	1.0081	0.9919	0.2629	0.0258	0.0001	$-\sigma_r/P_4$
	0.0787	0.1741	0.5938	1.3283	1.2851	0.5536	0.0464	0.0081	$\sigma_r/P_4$
		0.1296	0.3419			0.3143	0.0621		

الجدول ( 1 ) يبين قيم الإجهادات من تأثير الضغط الداخلي  $P_4$

#### ملاحظات :

1- إن قيمة الإجهادات التي حصلنا عليها هي بدلالة ( $P_4$ ) ، وذلك لأنه خلال حل المعادلات

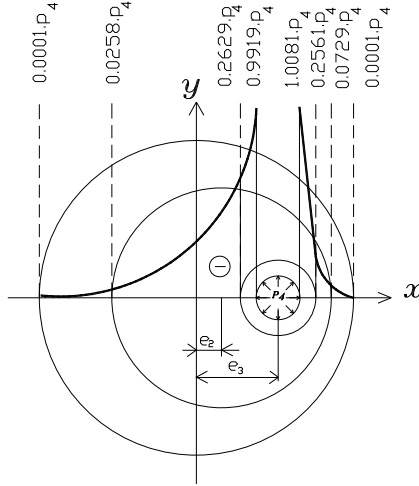
أعطينا ( $P_4=1$ ) ، وهذا يفسر وجود قيمة الإجهادات ( $\sigma_\theta$  ،  $\sigma_r$ ) مضروبة بـ  $P_4$  .

2- إن قيمة ( $\sigma_{r0} = 0$ ) ، وذلك لأن النقاط ( $Z$ ) التي تم اختيارها تقع على محور تناظر

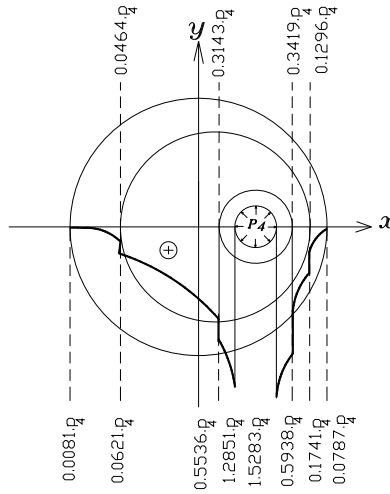
الصفحة .

3- من الشكلين (3) و (4) نلاحظ وجود قفزات بين الأجزاء المكونة للصفحة " نحاس ، برونز ، فولاذ " ، في مخطط  $(\sigma_{\theta})$  وغيابها في مخطط  $(\sigma_r)$  وهذا تفسره العلاقتين (5) و (7) .

4- لقد تم إدخال الأبعاد الهندسية  $(e_3, e_2, r_3, r_2)$  كنسبة من  $(r_1)$  ، وذلك ليتسنى لنا حل عدة مسائل بمعطيات هندسية مختلفة ، وبذلك نستطيع معرفة تأثير الأبعاد الهندسية للصفحة المدروسة على قيم الإجهادات .



الشكل (3)



الشكل (4)

## النتائج والمناقشة :

- 1- لقد تم وضع برنامج عام بلغة الفورتران للحصول على قيم الإجهادات في نقاط محددة ل (z) ، وذلك بمجرد إدخال المعطيات الهندسية والفيزيائية وتحديد قيمة (N) .
- 2- إذا أردنا حساب الإجهادات الكلية ( $\sigma_r$  ,  $\sigma_\theta$  ,  $\sigma_{r\theta}$ ) في الصفيحة المجمعة تحت تأثير كل من الحملات ( $\delta r_3$  ,  $\delta r_2$  ,  $P_4$  ,  $P_1$ ) فهناك طريقتين ، الأولى : حساب الإجهادات الكلية تحت تأثير الحملات " ضغوط وتوتر " مجتمعة .  
والثانية : حساب الإجهادات ( $\sigma_r$  ,  $\sigma_\theta$  ,  $\sigma_{r\theta}$ ) بدلالة ( $\delta r_3$  ,  $\delta r_2$  ,  $P_4$  ,  $P_1$ ) كل على حدة ، بالتالي تكون قيمة الإجهادات الكلية هي المجموع الجبري لقيم الإجهادات السابقة " مبدأ تراكم القوى " .
- 3 - وتفضل الطريقة الثانية لأنها تبين تأثير كل حمولة من الحملات على توزع الإجهادات .  
لقد تم في التطبيق العددي افتراض أن الصفيحة المركبة مؤلفة من ثلاث مواد " نحاس و برونز وفولاذ " ويمكن أن نبدل بين مواقع توضع تلك المواد للحصول على حل أمثل .
- 4 - إن قيمة الإجهادات القطرية ( $\sigma_r$ ) في النقطتين ( $e_3 + r_4$ ) و ( $e_3 - r_4$ ) الواقعتين على المحيط  $L_4$  يجب أن تساوي الضغط  $P_4$  " بسبب توافق الشروط المحيطية " .  
ولكن في التطبيق العددي كانتا على التوالي ( $1,0081 \cdot P_4$ ) و ( $0,9919 \cdot P_4$ ) ، وبالتالي فإن الخطأ المرتكب في تحديد قيمة الإجهادات لا يتجاوز (1% m) .
- 5- إن عدد المعادلات الخطية الأولى (N) المأخوذ من كل مجموعة من المجموعات الجبرية (13-24) يتعلق بدقة الحل المطلوبة ، وقد تبين أن (N=5) يعطي نتائج ذات دقة مقبولة ، كما هو مبين في (4) .
- 6- ويجب الإشارة إلى أنه في حال كون أحد أجزاء الصفيحة المجمعة " المركبة " غير دائري فإن حساب الإجهادات يتم أيضاً بطريقة التتابع العقدية ، ولكن مع إدخال مفهوم التحويل المطابق " identity transformation " الذي يعد بحثاً آخر مستقل .

## الخاتمة :

لقد بينا أنه بالإمكان الحصول على موديل حسابي وطريقة متطورة للبحث في تحديد الإجهادات بالصفائح أو العناصر المجمعة بالتداخل القسري والمكونة من مواد مختلفة ، والتي تعتبر إحدى الحلول الهندسية لزيادة متانة الأنابيب ومقاومتها للضغوط الداخلية ، وما يرافق ذلك من زيادة في اقتصادية المواد المستعملة وخفض لوزن الآلات والمنشآت في المجالات التقنية التي تستعمل فيها تلك العناصر ، مثل الصناعات المعدنية والمكابس الهيدروليكية والصناعات النفطية والتجهيزات الكيميائية والصناعات الحربية مثل سبطانات المدافع الضخمة وغيرها .

## References

- 1-AMENZADE U.A , 1967 - theory of elasticity . high school , Moscow , 271 P .
- 2-BAHTEYAROF U.A , 1972 - on the torsion of prismatic beams with a doubly connected domain . Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series , NO . 4 , 32 - 36 .
- 3-MUSKHELISHVILI N.I , 1966 - Some basic Mathematical Problems on the theory of elasticity . Nauka , Moscow , 707 P .
- 4-PARTON B.Z and PERLEN P.U , 1977 - of integral equations the theory of elasticity . Nauka , Moscow , 311 P .
- 5-TIMOSHENKO S.P and YOUNG, 1951 - theory of elasticity . Mc Graw – Hill BOOK company , New York , 450 P .
- 6- Ihssan Tarsha, Torsion of Circular Bar With Tow Longitudinal Circular Hall, Science Week 37 in Damascus, Vol.1,1997.