TORSION OF CIRCULAR BAR
WITH TWO LONGITUDINAL
CIRCULAR HALL

Dr. ENG. IHSSAN TARSHA
CIVIL ENG . AL-BAATH UNIVERCITY

ABSTRACT

Complex potential method which used in plane elasticity theory problems is considered one of the most important wide used methods after development of electronic computers .

This research can be considered a practical application to complex function approach in order to find tangential stresses of cylindrical bar under torsional moment .

The two hall along its length are located on the same diameter and on two different faces .

Q.Basic computer program has been used to obtain on the values of the tangential stresses at number of points on the same axis . This program will solved group of algebraic linear equations required . It should be noted that the number of equations depend on the solution accuracy required .

فتل قضيب أسطواني يحوي فجوتين أسطوانيتين على كامل طوله

د . إحسان الطرشة
أستاذ مساعد في كلية الهندسة المدنية
جامعة البعث

ملخص البحث :

تعتبر طريقة الكمون العقدي في تحليل مسائل نظرية المرونة المستوية من أهم الطرق العددية الواسعة الانتشار و ذلك بعد ظهور الحواسب الإلكترونية .

و يعتبر هذا البحث تطبيقاً عملياً لطريقة التوابع العقدية لإيجاد الإجهادات المماسية في قضيب أسطواني يحوي فجوتين أسطوانيتين على كامل طوله تقعان على قطر واحد وبجهتين مختلفتين ، و يتعرض لعزم فتل .

و قد تم استخدام برنامج بلغة (Q.BASIC) يعطي قيم الإجهادات المماسية في عدد من النقاط الواقعة على محور واحد ، و ذلك بعد إدخال الأبعاد الهندسية و الخواص الفيزيائية و من ثم حل جملة المعادلات الجبرية الخطية و التي يحدد عددها حسب دقة الحل المطلوبة.

المقدمة :

تعتبر طريقة الكمون العقدي وسيلة فعالة للغاية لحل المسائل التطبيقية في ميكانيك تشوه الجسم الصلب و خاصة المسائل المستوية الحدودية " الطرفية " منها .

ويرجع الفضل للباحثين (G.V.Kolosoff - N.I.Muskhelishvili) في وضع أسس طريقة الكمون العقدي لحل مسائل نظرية المرونة المستوية باستخدام التوابع العقدية .

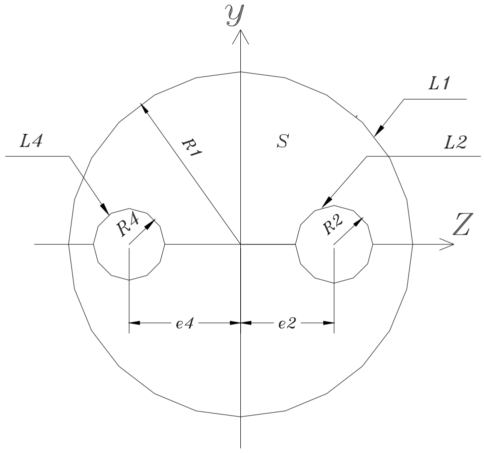
و أعمال الباحثين (U.A.Amenzade U.A.Bahtyarof) وآخرون غيرهم ، ساعدت في انتشار طريقة الكمون العقدي وجعلتها طريقة تطبيقية واسعة الانتشار ، حيث تفرض التوابع العقدية التحليلية في المقطع المدروس على شكل سلسلة قوى حدودها الثابتة تعين بحل عدد من المعادلات الجبرية الخطية التي تنتج عن تعويض تلك التوابع المفروضة في الشروط الحدودية " Boundary Conditions " للمسألة المدروسة .

والبحث المقدم هو حل لإحدى مسائل الفتل الهامة ، باستخدام التوابع العقدية .

هدف البحث وطريقته :

إن هدف البحث هو إيجاد موديل حسابي لتعيين الإجهادات المماسية في قضيب أسطواني نصف قطره (R_1) ومعرضة لعزم فتل (M_t) ويحوي فجوتين أسطوانيتين على كامل طوله ، الأولى

نصف قطرها (R_2) والبعد بين مركزها ومركز الأسطوانة (e_2) ، أما الثانية فنصف قطرها (R_4) والبعد بين مركزها ومركز الأسطوانة (e_4) كما في الشكل (1) .



الشكل (1)

وكما هو معلوم من طريقة الكمون العقدي ، أنه لحل مسألة فتل لابد من

البحث عن تابع $F(Z)$ ذي متغير عقدي $Z = X + iY$ يرتبط مع تابع الفتل " B.Saint - Venant " $\varphi(x, y)$ و التابع التوافقي المرافق له $\psi(x, y)$ المحقق لشرطي " A.L.Cauchy & G.F.B.Riemann " بالشكل التالي [1] :

$$iF(Z) = \varphi + i\psi$$

حيث :

$F(Z)$ - تابع عقدي توافقي و بالتالي تحليلي في أي مقطع عرضي للقضيب المدروس والذي يعتبر في مسألتنا هذه ساحة – مجال – ثلاثية الترابط (S) ، "ثنائية الفجوة " ويجب أن يحقق الشروط الحدودية التالية [2] :

$$F(t) + \overline{F(t)} = t.\bar{t} + C_i \qquad L_i \ (i = 1,2,,4) \qquad (1)$$

حيث : t – دليل النقاط على المحيط $L_i \ (i = 1,2,4)$

$C_i \ (i = 1,2,4)$ – ثوابت مجهولة يمكن افتراض أحدها بشكل اختياري ، أما بالنسبة للثابتين الآخرين فيجري تحديدهما أثناء حل المسألة .

يمكن افتراض التابع العقدي التحليلي بشكل مجموع تابعين أي :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

حيث : $F_1(z)$ – تابع تحليلي داخل المحيط L_1 .

$F_2(z)$ – تابع تحليلي خارج المحيط L_2 و L_4 .

ونفرض كلاً من $F_1(z)$; $F_2(z)$ بالشكل التالي :

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . \left(\frac{Z}{R_1}\right)^K ,$$

$$F_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k . \left(\frac{R_2}{Z - e_2}\right)^K + \sum_{k=1}^{\infty} f_K . \left(\frac{R_4}{Z + e_4}\right)^K .$$

وبالتالي :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{Z}{R_1}\right)^K + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{Z - e_2}\right)^K + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{Z + e_4}\right)^K . \quad (2)$$

ونجري تشكيل حدود التابع $F(z)$ على المحيط L_1 على شكل عقدية صحيحة " سلسلة قوى " حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t}{R_1}\right)$ [7] .

فالحد الأول من العلاقة (2) يتم تشكيله كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{Z}{R_1}\right)^K = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{R_1}\right)^n \qquad (3)$$

والحد الثاني :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{t - e_2}\right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_1}{t}\right)^k . \left(1 - \frac{e_2}{t}\right)^{-k}$$

وباعتبار أن : $\left|\frac{e_2}{t}\right| \langle 1$ على المحيط L_1 نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{z - e_2}\right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} C_{-k}^{\nu} . \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{\nu} . \left(\frac{R_1}{t}\right)^{k+\nu}$$

بفرض : $n = k + \nu$ نجد :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^K \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n-k} . C_{-k}^{n-k} . \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{n-k} . \left(\frac{R_1}{t}\right)^n$$

وبالأخذ بالاعتبار أن [1]: (4) $\sum_{k=1}^{\infty} --- \sum_{n=k}^{\infty} --- = \sum_{n=1}^{\infty} --- \sum_{k=1}^{n} ---$ نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{t - e_2}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* \left(\frac{R_1}{t}\right)^n \qquad (5)$$

حيث : $$d_n^* = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \,.\, C_{-k}^{n-k} \,.\, \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{n-k} \,.\, \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k} \,.\, d_k$$

والحد الثالث :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{z+e_4}\right)^{K} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^{k} \,.\, \left(\frac{R_1}{t}\right)^{k} \,.\, \left(1 + \frac{e_4}{t}\right)^{-k}$$

وباعتبار أن : $\left|\frac{e_4}{t}\right| \langle 1$ على المحيط L_1 نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{t+e_4}\right)^{K} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^{k} \,.\, \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{-k}^{\nu} \,.\, \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{\nu} \,.\, \left(\frac{R_1}{t}\right)^{k+\nu}$$

وبفرض أن : $n = k + \nu$ أيضاً نجد :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^{K} \sum_{n=k}^{\infty} C_{-k}^{n-k} \,.\, \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{n-k} \,.\, \left(\frac{R_1}{t}\right)^{n}$$

وبالأخذ بعين الاعتبار المطابقة (4) نجد:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{z+e_4}\right)^{k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \left(\frac{R_1}{t}\right)^{n}. \qquad (6)$$

حيث : $$f_n^* = \sum_{k=1}^{n} C_{-k}^{n-k} \,.\, \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{n-k} \,.\, \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^{k} \,.\, f_k$$

وبتعويض (3) و (5) و (6) في العلاقة (2) نجد :

$$F(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{R_1}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* \left(\frac{R_1}{t}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_1}{t}\right)^{K}$$

وبالتالي :

$$\overline{F(t)} = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{R_1}{t}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* \left(\frac{t}{R_1}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_k \left(\frac{t}{R_1}\right)^{K}$$

وبالتعويض في (1) مع اعتبار أنه على المحيط L_1 لدينا : $t \,.\, \bar{t} = R_1^2$

وأن : $C_1 = - R_1^2$ – وهي تمثل قيمة الثابت الوحيد الذي يمكننا افتراضه بشكل اختياري [3]، و

بالتالي العلاقة (1) تأخذ الشكل التالي : $F_1(t) + \overline{F_1(t)} = 0$

وبالتعويض فيها نحصل على :

$$a_n + d_n^* + f_n^* = 0 \qquad (7)$$

والحد الثابت ... $a_o = 0$

لنشكل حدود التابع $F(z)$ (العلاقة 2) على المحيط L_2 على شكل سلسلة تابعية عقدية صحيحة حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t - e_2}{R_2}\right)$.

فالحد الأول يأخذ الشكل :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{Z}{R_1}\right)^K = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R_1}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^k . \left(1 + \frac{t - e_2}{e_2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k} C_k^n \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{k-n} . \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n . \left(\frac{t - e_2}{R_2}\right)^n$$

ونعلم أن [1] : $\sum_{k=0}^{\infty} --- \sum_{n=0}^{k} --- = \sum_{n=0}^{\infty} --- \sum_{k=n}^{\infty} ---$ (8)

لذا نجد : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R_1}\right)^K = a_o^* + \sum_{n=}^{\infty} a_n^* \left(\frac{t - e_2}{R_2}\right)^n$ (9)

حيث : $a_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{K-n} . \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n . a_k$

و لنشكل الحد الثاني :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k . \left(\frac{R_2}{z - e_2}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_n . \left(\frac{R_2}{t - e_2}\right)^n \qquad (10)$$

تشكيل الحد الثالث :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{Z + e_4}\right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{t + e_4}\right)^K$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^K . \left(1 + \frac{t - e_2}{e_2 + e_4}\right)^{-K}$$

وباعتبار أنه على المحيط L_1 لدينا $\left|\frac{t - e_2}{e_2 + e_4}\right| \langle 1$ نجد :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^K . \sum_{n=0}^{\infty} C_{-K}^n \left(\frac{R_2}{e_2 + e_4}\right)^n . \left(\frac{t - e_2}{R_2}\right)^{-n}$$

وبتغيير ترتيب المجاميع نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{R_4}{z+e_4} \right)^K = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{**} \left(\frac{t-e_2}{R_2} \right)^n . \qquad (11)$$

حيث : $$f_n^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-K}^{n} \left(\frac{R_2}{e_2+e_4} \right)^n . \left(\frac{R_4}{e_2+e_4} \right)^K . f_k$$

وبتعويض (9) و (10) و (11) في (2) نجد :

$$F(t) = a_o^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \left(\frac{t - e_2}{R_2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{R_2}{t - e_2} \right)^n + f_0^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{**} \left(\frac{R_2}{t - e_2} \right)^n .$$

$$\overline{F(t)} = a_o^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \left(\frac{R_2}{t - e_2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{t - e_2}{R_2} \right)^n + f_0^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{**} \left(\frac{t - e_2}{R_2} \right)^n .$$

وبالأخذ بعين الاعتبار أنه على المحيط L_2 لدينا [1] :

$$t . \bar{t} = \left(e_2 + R_2 . e_2^{i\theta} \right) \left(e_2 + R_2 . e_2^{-i\theta} \right)$$

$$= e_2 . R_2 \left(\frac{t - e_2}{R_2} + \frac{R_2}{t - e_2} \right) + e_2^2 + R_2^2$$

وبالتالي تأخذ العلاقة (1) الشكل التالي :

$$F(t) + \overline{F(t)} = e_2 . R_2 \left(\frac{t - e_2}{R_2} + \frac{R_2}{t - e_2} \right) + d_1$$

حيث : $$d_1 = e_2^2 + R_2^2 + C_2$$

وبتعويض $F(t)$ و $\overline{F(t)}$ بما يساويها وبمقارنة الحدود المتشابهة مع بعضها البعض نحصل على:

$$a_n^* + d_n + f_n^{**} = e_2 . R_2 . \varepsilon (n) \qquad (12)$$

حيث : $$\varepsilon (n) = \begin{cases} 1 \ \text{Úä ÏãÇ} \ n = 1 \\ 0 \ \text{Úä ÏãÇ} \ n \neq 1 \end{cases}$$

والحد الثابت : $$C_2 = -e_2^2 - R_2^2 + 2 a_o^* + 2 . f_o^{**}$$

ولكن :

$$a_o^* = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^o . C_k^o . a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^k . a_k$$

$$f_o^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k}^o . \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^k . \left(\frac{R_2}{e_2 + e_4}\right)^o . f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^k . f_k$$

وبالتعويض نجد :

$$C_2 = 2.\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^k a_k + 2.\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^k f_k - (e_2^2 + R_2^2)$$

و لنشكل التابع $F(Z)$ [العلاقة 2] على المحيط L_4 على شكل سلسلة تابعية ، حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t + e_4}{R_4}\right)$.

الحد الأول :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{Z}{R_1}\right)^K = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R_1}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k . \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^k . \left(1 - \frac{t + e_4}{e_4}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{k} (-1)^{k+n} . C_k^n \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{k-n} . \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^n . \left(\frac{t + e_4}{R_4}\right)^n$$

و بالأخذ بالاعتبار المطابقة (4) نجد :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R_1}\right)^K = a_o^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{**} \left(\frac{t + e_4}{R_4}\right)^n \qquad (13)$$

حيث :

$$a_n^{**} = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} . C_k^n \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{K-n} . \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^n . a_k$$

أما الحد الثاني فيصبح على الشكل :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{Z + e_2} \right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{t + e_2} \right)^K$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_k .(-1)^k . \left(\frac{R_2}{e_2 + e_4} \right)^K \left(1 - \frac{t + e_4}{e_2 + e_4} \right)^{-K}$$

وباعتبار أنه لدينا على المحيط L_2 $\left| \frac{t + e_4}{e_2 + e_4} \right| \langle 1$ ، [2] نجد :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{R_2}{e_2 + e_4} \right)^K . \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k} . C_{-K}^{n} \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4} \right)^n . \left(\frac{t + e_4}{R_4} \right)^n$$

وبتغيير ترتيب المجاميع نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k . \left(\frac{R_2}{Z + e_2} \right)^K = d_0^{***} + \sum_{n=1}^{\infty} d_k^{***} . \left(\frac{t + e_4}{R_4} \right)^n . \qquad (14)$$

حيث : $$d_n^{***} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} . C_{-K}^{n} \left(\frac{R_4}{e_2 + e_4} \right)^n . \left(\frac{R_2}{e_2 + e_4} \right)^K . d_k$$

و أخيراً نشكل الحد الثالث :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{f}_k . \left(\frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{z} + \mathrm{e}_4} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{f}_n . \left(\frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{t} + \mathrm{e}_4} \right)^n \qquad (15)$$

وبتعويض (13) و (14) و (15) في (2) نجد :

$$F(\mathrm{t}) = \mathrm{a}_o^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n^{**} \left(\frac{\mathrm{t} + \mathrm{e}_4}{\mathrm{R}_4} \right)^n + \mathrm{d}_0^{***} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{d}_n^{***} . \left(\frac{t - e_2}{R_4} \right)^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{\mathrm{R}_4}{t + \mathrm{e}_4} \right)^n .$$

$$\overline{F(\mathrm{t})} = \mathrm{a}_o^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n^{**} \left(\frac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{t} + \mathrm{e}_4} \right)^n + \mathrm{d}_0^{***} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{d}_n^{***} . \left(\frac{\mathrm{R}_2}{t - e_2} \right)^n +$$

$$+ \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{f}_\mathrm{n} \left(\frac{\mathrm{t} + \mathrm{e}_4}{R_4} \right)^n .$$

وباعتبار أنه على المحيط L_4 لدينا [1] :

$$t.\bar{t} = \left(-e_4 + R_4.e_4^{i\theta}\right)\left(-e_4 + R_4.e_4^{-i\theta}\right)$$

$$= -e_4 . R_4 \left(\frac{t + e_4}{R_4} + \frac{R_4}{t + e_4}\right) + (e_4^2 + R_4^2)$$

وبالتالي العلاقة (1) تأخذ الشكل التالي :

$$F(t) + \overline{F(t)} = -e_4 . R_4 \left(\frac{t + e_4}{R_4} + \frac{R_4}{t + e_4}\right) + d_2$$

حيث : $$d_2 = e_4^2 + R_4^2 + C_4$$

وبتعـويض $F(t)$ و $\overline{F(t)}$ بمـا يسـاويها وبمقارنـة الحـدود المتشـابهة وذات الأس المتسـاوي مـع بعضها البعض نحصل على:

$$a_n^{**} + d_n^{***} + f_n = -e_4 . R_4 .\varepsilon(n) \quad (16)$$

والحد الثابت :

$$C_4 = -e_4^2 - R_4^2 + 2.\, a_0^{**} + 2 . d_o^{***}$$

وبالتعويض نجد :

$$C_4 = 2 .\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k . \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^k .a_k + 2.\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k .\left(\frac{R_2}{e_2 + e_4}\right)^k .d_k - (e_4^2 + R_4^2)$$

والتالي نكون قد حصلنا على ثلاث مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية (7) و(12) و (16) وهي :

$$a_n + d_n^{*} + f_n^{*} = 0$$

$$a_n^{*} + d_n + f_n^{**} = e_2 . R_2 . \varepsilon(n)$$

$$a_n^{**} + d_n^{***} + f_n = -e_4 . R_4 . \varepsilon(n)$$

والحدود الثابتة هي : $$C_1 = -R_1^2 \quad ; \; a_0 = 0 \quad .$$

$$C_2 = -e_2^2 - R_2^2 + 2\, a_o^{*} + 2 . f_o^{**}$$

$$C_2 = 2.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e_2}{R_1}\right)^k a_k + 2.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R_4}{e_2 + e_4}\right)^k f_k - (e_2^2 + R_2^2)$$

$$C_4 = -e_4^2 - R_4^2 + 2\, a_0^{**} + 2 . d_o^{***}$$

$$C_4 = 2.\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.\left(\frac{e_4}{R_1}\right)^k.a_k + 2.\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.\left(\frac{R_2}{e_2+e_4}\right)^k.d_k - (e_4^2 + R_4^2)$$

حيث أن :

$$d_n^* = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} . C_{-k}^{n-k} . \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{n-k} . \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . d_k$$

$$f_n^* = \sum_{k=1}^{n} C_{-k}^{n-k} . \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{n-k} . \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^k . f_k$$

$$a_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \left(\frac{e_2}{R_1}\right)^{K-n} . \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n . a_k$$

$$a_n^{**} = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k+n}.C_k^n \left(\frac{e_4}{R_1}\right)^{K-n} . \left(\frac{R_4}{R_1}\right)^n . a_k$$

$$f_n^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-K}^n \left(\frac{R_2}{e_2+e_4}\right)^n . \left(\frac{R_4}{e_2+e_4}\right)^K . f_k$$

$$d_n^{***} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k} . C_{-K}^n \left(\frac{R_4}{e_2+e_4}\right)^n . \left(\frac{R_2}{e_2+e_4}\right)^K . d_k$$

واستناداً للأساس النظري [4,5] بشأن وجود حل ذي مدلول واحد لمسائل نظرية المرونة المستوية نستطيع القول بأن مجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية الثلاث (16,12,7) لها حل وحيد ومحدد .

و يمكن الحصول على هذا الحل بأخذ أولاً عدد محدد (N) من المعادلات من كل مجموعة من المجموعات الثلاث ، فمثلاً إذا أخذنا الحدود الخمسة الأولى (N = 5) من كل مجموعة من المجموعات الثلاث فإننا نحصل على 5)×(3 = 15 خمس عشرة معادلة . ومن ثم نعين جذور تلك المعادلات " المعاملات الثابتة لسلسلة القوى " $\{ a_i , d_i , f_i ; (i = \overline{1,N})\}$ ،

وبالتالي من خلالها نعين التابع العقدي $F(z)$ التحليلي في الساحة (S) الثلاثية الترابط ونوجد قيم الثوابت $C_i \; (i = 2 , 4)$ أما لحساب الإجهادات المماسية فإننا نطبق العلاقة التالية [1] :

$$\tau_{xz} - i\,\tau_{xy} = \mu.\,\theta.\,i\left[F'(z) - \overline{Z}\right] \qquad (17)$$

حيث : μ – معامل فيزيائي يتعلق بالمادة ويتطابق مع معامل القص G ويسمى بمعامل لامي .

θ – ثابت الفتل "زاوية الفتل النسبية " وتساوي $\frac{M_t}{D}$

M_t – عزم الفتل المطبق .

D _ صلابة المقطع العرضي للقضيب على الفتل وتعطى بالعلاقة [3] :

$$D = \mu\left[I_o - \frac{i}{4}\sum_{i=1,2,4}\oint_{l_i}\left(F(t)-\overline{F(t)}\right)d\left(t\,.\,\bar{t}\right)\right] \qquad (18)$$

I_0 – عزم العطالة القطبي للمقطع العرضي بالنسبة لمبدأ الإحداثيات .

$\overline{Z}$ – نظير النقطة $z(x,y) = x + i\,y$ المطلوب حساب الإجهادات فيها.

$F'(z)$ – مشتق التابع العقدي الذي حصلنا عليه ويعطى بالعلاقة .

$$F'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{k}{R_1}\right).\left(\frac{Z}{R_1}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} d_k\left(\frac{k}{R_2}\right).\left(\frac{R_2}{z - e_2}\right)^{k+1} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{k}{R_4}\right).\left(\frac{R_4}{z+e_4}\right)^{k+1}.$$

الجزء العملي والمناقشة :

لقد تم وضع برنامج عام بلغة (Q . BASIC) يسمح بحل عدة مسائل بمعطيات " هندسية وفيزيائية " مختلفة .

ففي المثال التطبيقي تم إدخال المعطيات الهندسية النسبية التالية بدلالة R_1 وهي :

$$\left(R_2 = 0,2 \,.\, R_1 \;;\; R_4 = 0,2 \,.\, R_1\right)$$

$$\left(E_2 = 0.6 \,.\, R_1 \;;\; E_4 = 0.6 \,.\, R_1\right)$$

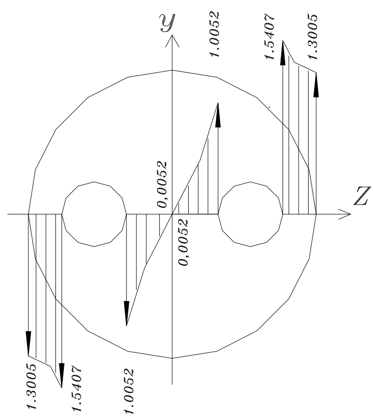
وتم حساب قي الإجهادات في نقاط محددة من العلاقة (16) وبدلالة $\left(\mu \; \frac{R_1 \,.\, M_t}{D}\right)$ وذلك ليتسنى لنا مقارنة النتائج مع نتائج مسألة محلولة ، المرجع [1] و التي تعتبر حالة خاصة لمسألة البحث ، وللتوضيح نظمت قيم الإجهادات ضمن الجدول (1) ، ورسم مخطط توزعها ، الشكل (2) .

ملاحظة :

لقد تم إدخال الأبعاد الهندسية النسبية للمثال التطبيقي بشكل متناظر و ذلك لمقارنة النتائج ، ولكنه بفضل البرنامج الموضوع تم حل عدد كبير من المسائل وبأبعاد هندسية مختلفة .

الجدول (1) :

النقاط (Z)	$\pm (R_1)$	$(E_2 \mp R_2)$	$-(E_4 \mp R_4)$	$0.001 . R_1$
الإجهادات $\left(\frac{\mu . R_1 \ M_t}{D}\right) \times \ \tau_{xy}$	± 1.3005	- 1.5407 - 1.0052	+ 1.5407 + 1.0052	± 0.0052



الشكل (2)

أما صلابة المقطع العرضي على الفتل (D) فقد تم حسابها بشكل مستقل عن الإجهادات لنتمكن من مقارنة النتائج من جهة ومعرفة تأثير (D) على قيم الإجهادات
من جهة أخرى . هذا الحساب جرى بتطبيق العلاقة (18) ضمن برنامج الحاسب آخذين بعين الاعتبار أنه على المحيط L_1 لدينا :

$$t\,.\,\bar{t} = R_1^2 \Rightarrow d\left(t\,.\,\bar{t}\right) = d\,R_1^2 = 0$$

وعلى المحيط L_2 لدينا :

$$d\left(t\,.\,\bar{t}\right) = (R_2\,.\,e_2)\,.\,d\left(\frac{R_2}{t - e_2} + \frac{t - e_2}{R_2}\right)$$

وعلى المحيط L4 لدينا :

$$d\left(t\,.\,\bar{t}\right) = -(R_4\,.\,e_4)\,.\,d\left(\frac{R_4}{t + e_4} + \frac{t + e_4}{R_4}\right)$$

وبالتعويض وإجراء بعض العمليات الرياضية البسيطة وجد أن :

$$D = \frac{\mu\,.\,\pi}{2}.\Big[\left(R_1^4 - R_2^4 - R_4^4 - 2.\,R_2^2\,.\,e_2^2 - 2\,.\,R_4^2\,.\,e_4^2\right) + +2\,.\,R_2\,.\,e_2.\left(a_1^{*} - d_1 + f_1^{**}\right) - -2\,.\,R_4\,.\,e_4\,.\left(a_1^{**} + d_1^{***} - f_1\right)\Big]$$

النتائـــج :

يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي :

1- باستخدام طريقة التوابع العقدية تم حل إحدى مسائل نظرية المرونة المستوية ، وإيجاد موديل حسابي لتعيين الإجهادات المماسية في القضيب الأسطواني الذي يحوي فجوتين ويتعرض لعزم فتل .

2 - إن عدد المعادلات (N) المأخوذ من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية , 12 , 16) (7 يتعلق بدقة الحل المطلوبة وقد تبين أن (N =5) يعطي نتائج ذات دقة مقبولة .

3 - لقد تم حساب الثوابت $C_i\ (i = 2,4)$ وتعويضها في الشروط الحدودية للمسألة " المعادلة 1 " وقد وجدنا أنه في نقاط محددة Z " المبينة في الجدول 1 " لا يتجاوز الخطأ المرتكب في تحقيق تلك الشروط القيمة % 3

4 - إن البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة (Q.BASIC) هو برنامج عام نستطيع من خلاله حل المعادلات الناتجة عن تحديد قيمة اختيارية لـ (N) ، وبالتالي تعيين
قيم المعاملات الثابتة لسلسلة القوى ، ومن ثم حساب قيم الإجهادات في نقاط محددة تتغير بتغير الأبعاد الهندسية للمسألة المدروسة .

5 – قد تم إدخال الأبعاد الهندسية $\left(e_2, e_4, R_2 \;\;, \; R_4\right)$ كنسبة من $\left(R_1\right)$ وذلك ليتسنى لنا حل عدة مسائل وبمعطيات هندسية مختلفة ، علماً أن صلابة المقطع العرضي على الفتل (D) تتغير تلقائياً وفق الأبعاد الهندسية المختارة .

6 – إن النتائج التي تم الحصول عليها تتطابق مع النتائج العددية لمسألة خاصة وموجودة بالمرجع [1] .

7 – إن قيم الإجهادات التي تم الحصول عليها نظمت ضمن جداول ومخططات ليسهل استخدامها .

المراجع

References

1- AMENZADE U.A , 1967 - theory of elasticity. high school, Moscow, 271 P.

2- BAHTEYAROF U.A , 1972 - on the torsion of prismatic beams with a doubly connected domain Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series , NO . 4 , 32 - 36 .

3- MUSKHELISHVILI N.I , 1966 - Some basic Problems of the Mathematical theory of elasticity . Nauka , Moscow , 707 P .

4- PARTON B.Z and PERLEN P.U , 1977 integral equations of the e theory of elasticity . Nauka , Moscow, 311 P .

5- SHERMAN D.I , 1972 - on a method of Treatment of boundary - Value problems of The Theory of Functions and two-Dimensional Problems of the theory of elasticity , continuum mechanics and Related problems of analysis , NO . 1 , 635 - 665 .

6- TIMOSHENKO S.P and GOODIER J.N , 1957 - theory of elasticity . Mc Graw - Hill BOOK company , New York , 575 P .

7- Ihssan Tarsha, Using The Complex Functions to Compute the Stresses in a Plate Interconnected by Force, Journal of Bassel AL–Assed for Engineering Sciences, Vol.1,1997.