

TORSION OF BAR CONSISTS OF THREE DIFFERENT MATERIAL PIPES

**Dr. IHSSAN TARSHA
PROF. ASSISTANCE IN
AL -BAATH UNIVERSITY**

**Eng. SOHA WAHBY
CIVIL ENGINEERING DEPARTMENT
AL-BAATH UNIVERSITY**

ABSTRACT

complex potential method which used in plane elasticity theory problems is considered one of the most important wide used methods after development of electronic computers .

this research is a practical application of complex function

approach in order to find tangential stresses of cylindrical bar consisting of three different material pipes under torsional moment .

Q . Basic computer program has been used to obtain on the values of the tangential stresses at number of points on the same axis . this program will solve a group of algebraic linear equations required . it should be noted that the number of equation depend on the solution accuracy required .

فتل قضيب مؤلف من ثلاثة

أنابيب مكونة من مواد مختلفة

د. م. إحسان الطرشة

أستاذ مساعد في كلية الهندسة المدنية - جامعة البعث

م. سهى وهبي

طالبة دبلوم في كلية الهندسة المدنية - جامعة البعث

ملخص البحث :

تعتبر طريقة الكمون العقدي في تحليل مسائل نظرية المرونة المستوية من أهم الطرق العددية الواسعة الانتشار و ذلك بعد ظهور الحواسب الإلكترونية .

و يعتبر هذا البحث تطبيقاً عملياً لطريقة التوابع العقدية لإيجاد الإجهادات المماسية في قضيب أسطواني مؤلف من ثلاثة أنابيب مكونة من مواد مختلفة و يتعرض لعزم فتل .

و قد تم استخدام برنامج بلغة (Q.BASIC) يعطي قيم الإجهادات المماسية في عدد من النقاط الواقعة على محور واحد ، و ذلك بعد إدخال الأبعاد الهندسية و الخواص الفيزيائية للمواد المكونة للأنبوب ، و من ثم حل جملة المعادلات الجبرية الخطية و التي يحدد عددها حسب دقة الحل المطلوبة.

المقدمة :

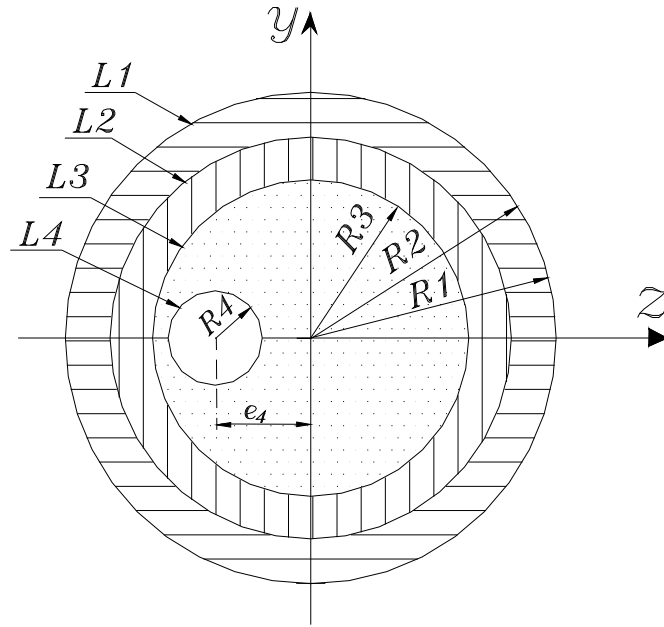
يرجع الفضل للباحثين (G.V.Kolosoff - N.I.Muskhelishvili) في وضع أسس طريقة الكمون العقدي لحل مسائل نظرية المرونة المستوية باستخدام التوابع العقدية .

و أعمال الباحثين (U.A.Amenzade U.A.Bahtyarof) وآخرون غيرهم ، ساعدت في انتشار طريقة الكمون العقدي وجعلتها طريقة تطبيقية واسعة الانتشار ، حيث تفرض التوابع العقدية التحليلية في المقطع المدروس على شكل سلسلة قوى حدودها الثابتة تعين بحل عدد من المعادلات الجبرية الخطية التي تنتج عن تعويض تلك التوابع المفروضة في الشروط الحدودية " Boundary Conditions " للمسألة المدروسة .

والبحث المقدم هو حل لإحدى مسائل الفتل الهامة ، باستخدام التوابع العقدية .

هدف البحث وطريقته :

في هذا البحث سوف نعالج مسألة توزع الإجهادات المماسية في مقطع عرضي لقضيب دائري ، مؤلف من ثلاثة أنابيب متداخلة و متصلة مع بعضها البعض بشكل ثابت ، لتشكل عنصراً واحداً ، و هذه الأنابيب مؤلفة من مواد مختلفة معاملات قصها الموافقة هي $(j = 1,2,3)$ μ_j ومعرضة لعزم فتل (M_t) يقع في مستوي عمودي على محورها الطولي ، كما في الشكل (1) .



الشكل (1)

وكما هو معلوم من طريقة الكمون العقدي ، أنه لحل مسألة فتل لابد من البحث عن تابع متغير عقدي $\varphi_j(Z)$; $(j = 1,2,3)$ توافقي و بالتالي تحليلي في أي مجال " ساحة " من المجالات S_j ($j = 1,2,3$) بالشكل التالي [1] :

$$\varphi_j(Z) = \Phi_j(Z) + \Psi_j(Z) \quad ; \quad (j=1,2,3)$$

حيث :

. $Z = X + iY$ - إحداثيات نقطة في المجال المدروس .

. $\Phi_j(Z)$; $(j = 1,2,3)$ - تابع منتظم "تحليلي" داخل المحيط $L_{1,2,3}$

. $\Psi_j(Z)$; $(j = 1,2,3)$ - تابع منتظم "تحليلي" خارج المحيط $L_{2,3,4}$

سنبحث عن التوابع $\varphi_j(Z)$; $(j = 1,2,3)$ بشكل سلسلة قوى " سلسلة لوران - Laurent " ، وفق

الشكل التالي [2] :

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{z}{R_1} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{z} \right)^k \quad (1)$$

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} \left(\frac{z}{R_2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R_3}{z} \right)^k \quad (2)$$

$$\varphi_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} \left(\frac{z}{R_3} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{z + e_4} \right)^k \quad (3)$$

يجب أن تحقق التتابع المفروضة $\varphi_j(z)$, ($j=1,2,3$) التحليلية والمنتظمة في المجالات S_j ($j = 1,2,3$) ، الشروط الطرفية والتلامسية التالية [3] :

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t.\bar{t} + c_1 \quad \text{on } L_1 \quad (4)$$

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = \varphi_2(t) - \overline{\varphi_2(t)} \quad \text{on } L_2 \quad (5)$$

$$\mu_1 \cdot [\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)}] - \mu_2 \cdot [\varphi_2(t) + \overline{\varphi_2(t)}] = (\mu_1 - \mu_2) \cdot t.\bar{t} \quad (6)$$

$$\varphi_2(t) - \overline{\varphi_2(t)} = \varphi_3(t) - \overline{\varphi_3(t)} \quad \text{on } L_3 \quad (7)$$

$$\mu_2 [\varphi_2(t) + \overline{\varphi_2(t)}] - \mu_3 [\varphi_3(t) + \overline{\varphi_3(t)}] = (\mu_2 - \mu_3) \cdot t.\bar{t} \quad (8)$$

$$\varphi_3(t) + \overline{\varphi_3(t)} = t.\bar{t} + c_4 \quad \text{on } L_4 \quad (9)$$

حيث :

$(a_k^j, b_k^j ; j=1,2,3)$ - هي المقادير الثابتة المجهولة والتي يطلب تحديد قيمتها

وتسمى بمعاملات سلسلة القوى .

t, \bar{t} - دليل ومرافق دليل النقاط على المحيط L_j ($j = 1,2,3,4$)

C_j ($j=1,4$) - ثابتان مجهولان يمكن افتراض أحدهما بشكل اختياري ، أما بالنسبة للثابت

الآخر فيجري تحديده أثناء حل المسألة .

μ_j ($j=1,2,3$) - ثوابت لامي وهي معاملات فيزيائية تتعلق بالمادة وتتطابق مع معاملات

القص G .

إن العلاقتين (4) و (9) تعبران عن أن السطح الخارجي الداخلي (L_j ($j = 1,4$) خاليان من الإجهادات

والعلاقتين (5) و (7) تستندان على مبدأ الفعل ورد الفعل ، وأن القوى بين سطحي كل أنبوبين متلامسين تكون متساوية بالقيمة و مختلفة بالإشارة ، وتعبران عن استمرارية الإجهادات بين المجالات "المناطق - الأجزاء" (S_1 و S_2) ، وكذلك بين (S_2 و S_3) .

والعلاقتين (6) و (8) تعتمدان على شروط عدم وجود انزلاق بين الأجزاء المتلامسة (S_1 و S_2) وكذلك بين (S_2 و S_3) ، بالنسبة لمماسات المحيطين L_2 و L_3 و أن الانتقالات هي توابع مستمرة و ذلك عند الانتقال من مجال إلى آخر أو من أنبوب إلى آخر .

والآن نجري تشكيل حدود التابع $\varphi_1(z)$ العلاقة (1) على المحيط L_1 على شكل سلسلة عقدية صحيحة " سلسلة قوى " حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t}{R_1}\right)$ ، كما يلي :

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{t}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_1}{t}\right)^k$$

$$\varphi_1(t) = a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{t}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_1}{t}\right)^k \quad (10)$$

$$\overline{\varphi_1(t)} = a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{R_1}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_1}\right)^k \quad (11)$$

و باعتبار أنه على المحيط L_1 لدينا : $t \cdot \bar{t} = R_1^2$ و $C_1 = -R_1^2$ التي تمثل قيمة الثابت الوحيد الذي يمكننا افتراضه بشكل اختياري [3] ، فإن العلاقة (4) تأخذ الشكل التالي :

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0$$

وبالتعويض فيها كل من العلاقات (10, 11) نحصل على :

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{t}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_1}{t}\right)^k + a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{R_1}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_1}\right)^k = 0$$

أو بالشكل التالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(a_k^{(1)} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot b_k^{(1)} \right) \cdot \left[\left(\frac{t}{R_1}\right)^k + \left(\frac{R_1}{t}\right)^k \right] \right\} + 2 \cdot a_0^{(1)} = 0$$

وبالمطابقة نحصل على المعادلة التالية :

$$a_k^{(1)} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot b_k^{(1)} = 0$$

و بتبديل كل k ب n تصبح المعادلة السابقة على الشكل :

$$a_n^{(1)} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \cdot b_n^{(1)} = 0 \quad (12)$$

والمعامل الثابت : $a_0^{(1)} = 0$

ويتشكل حدود التابع $\varphi_1(z)$ العلاقة (1) على المحيط L_2 على شكل سلسلة عقدية صحيحة " سلسلة قوى " حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t}{R_2}\right)$ نجد :

$$\varphi_1(t) = a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k \quad (13)$$

$$\overline{\varphi_1(t)} = a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k \quad (14)$$

أما حدود التابع $\varphi_2(z)$ العلاقة (2) فيجري تشكيله أعلى المحيط L_2 على شكل سلسلة عقدية صحيحة

" سلسلة قوى " حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t}{R_2}\right)$ ، كما يلي :

$$\varphi_2(t) = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k \quad (15)$$

$$\overline{\varphi_2(t)} = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k \quad (16)$$

و بتعويض (13,14,15,16) في (5) نجد :

$$\begin{aligned} & a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k - \\ & a_0^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k = \\ & = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k - \\ & - a_0^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k \end{aligned}$$

وبعد الإصلاح نجد :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot a_k^{(1)} - b_k^{(1)} \right) \cdot \left[\left(\frac{t}{R_2}\right)^k - \left(\frac{R_2}{t}\right)^k \right] \right\} = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(a_k^{(2)} - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k b_k^{(2)} \right) \cdot \left[\left(\frac{t}{R_2}\right)^k - \left(\frac{R_2}{t}\right)^k \right] \right\} \end{aligned}$$

وبالمطابقة وتبديل k ب n نحصل على المعادلة التالية :

$$a_n^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n - b_n^{(1)} - a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n = 0 \quad (17)$$

و بتعويض (13,14,15,16) في العلاقة (6) نجد :

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \cdot [a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + a_0^{(1)} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k] - \mu_2 \cdot [a_0^{(2)} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + a_0^{(2)} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_2}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_2}\right)^k = (\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2
\end{aligned}$$

أو بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k a_k^{(1)} + b_k^{(1)} \right] - \mu_2 \left[a_k^{(2)} + \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k b_k^{(2)} \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \left[\left(\frac{t}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{t}\right)^k \right] + 2 \cdot (\mu_1 a_0^{(1)} - \mu_2 a_0^{(2)}) = (\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2
\end{aligned}$$

وبالمطابقة وتبديل k بـ n نحصل على المعادلة التالية :

$$\mu_1 \cdot \left[a_n^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n + b_n^{(1)} \right] - \mu_2 \cdot \left[a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \right] = 0 \quad (18)$$

و المعاملات الثابتة :

$$2 \cdot \mu_1 \cdot a_0^{(1)} - 2 \cdot \mu_2 \cdot a_0^{(2)} = (\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2$$

وبما أن : $a_0^{(1)} = 0$

$$a_0^{(2)} = -\frac{(\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2}{2 \cdot \mu_2} \quad \text{فإن :}$$

نشكل الآن على المحيط L_3 ، التابع $\varphi_2(z)$ بشكل سلسلة تابعة ، حدودها المتغيرة من الشكل

$$\cdot \left(\frac{t}{R_3}\right)$$

$$\varphi_2(t) = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{R_3}{t}\right)^k \quad (19)$$

$$\overline{\varphi_2(t)} = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{R_3}{t}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{t}{R_3}\right)^k \quad (20)$$

و نشكل كذلك على المحيط L_3 ، التابع $\varphi_3(z)$ على شكل سلسلة تابعة ، حدودها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{t}{R_3}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \left(\frac{Z}{R_3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{t}{R_3}\right)^k \quad \text{فالحد الأول :}$$

أو

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot \left(\frac{t}{R_3}\right)^n \quad (21)$$

و لنشكل الحد الثاني :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{z + e_4}\right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{R_3}\right)^k \cdot \left(\frac{R_3}{t}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{e_4}{t}\right)^{-k}$$

وباعتبار أن : $\left|\frac{e_4}{t}\right| < 1$ على المحيط L_3 نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{t + e_4}\right)^K = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{R_3}\right)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{-k}^{\nu} \left(\frac{e_4}{R_3}\right)^{\nu} \cdot \left(\frac{R_3}{t}\right)^{k+\nu}$$

وبفرض أن : $n = k + \nu$ أيضاً نجد :

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{R_3}\right)^K \sum_{n=k}^{\infty} C_{-k}^{n-k} \cdot \left(\frac{e_4}{R_3}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{R_3}{t}\right)^n$$

وبالأخذ بعين الاعتبار المطابقة التالية [1] :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{n=k}^{\infty} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \dots \sum_{k=1}^n \dots$$

نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{z + e_4}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \left(\frac{R_3}{t}\right)^n \quad (22)$$

حيث :

$$b_n^* = \sum_{k=1}^n C_{-k}^{n-k} \cdot \left(\frac{e_4}{R_3}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3}\right)^k \cdot b_k^{(3)}$$

و بالتالي :

$$\varphi_3(t) = a_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)} \left(\frac{t}{R_3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \cdot \left(\frac{R_3}{t}\right)^n \quad (23)$$

$$\overline{\varphi_3(t)} = a_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)} \left(\frac{R_3}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \cdot \left(\frac{t}{R_3}\right)^n \quad (24)$$

وبتعويض العلاقات (21-22-23-24) في العلاقة (7) نجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} - b_n^{(2)} \right] \cdot \left[\left(\frac{t}{R_3}\right)^n - \left(\frac{R_3}{t}\right)^n \right] \right\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(a_n^{(3)} - b_n^* \right) \cdot \left[\left(\frac{t}{R_3}\right)^n - \left(\frac{R_3}{t}\right)^n \right] \right\}$$

وبمقارنة العوامل المتغيرة وذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نجد :

$$\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} - b_n^{(2)} - a_n^{(3)} + b_n^* = 0 \quad (25)$$

وبتعويض العلاقات (21-22-23-24) في العلاقة (8) نجد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \mu_2 \left[\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \right] - \mu_3 \left[a_n^{(3)} + b_n^* \right] \right\} \cdot \left[\left(\frac{t}{R_3}\right)^n + \left(\frac{R_3}{t}\right)^n \right] + 2 \cdot \left(\mu_2 a_0^{(2)} - \mu_3 a_0^{(3)} \right) = (\mu_2 - \mu_3) \cdot R_3^2$$

وبالمطابقة نجد :

$$\mu_2 \cdot \left[\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \right] - \mu_3 \cdot \left[a_n^{(3)} + b_n^* \right] = 0 \quad (26)$$

و المعاملات الثابتة :

$$2 \cdot \mu_2 \cdot a_0^{(2)} - 2 \cdot \mu_3 \cdot a_0^{(3)} = (\mu_2 - \mu_3) \cdot R_3^2$$

وبما أن :

$$a_0^{(2)} = -\frac{(\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2}{2 \cdot \mu_2}$$

فإن :

$$a_0^{(3)} = -\frac{(\mu_2 - \mu_3) \cdot R_3^2 + (\mu_1 - \mu_2) \cdot R_2^2}{2 \cdot \mu_3}$$

و لنشكل التابع $\varphi_3(z)$ [العلاقة 3] على المحيط L_4 على شكل سلسلة تابعة ، حدودها المتغيرة من

$$\cdot \left(\frac{t + e_4}{R_4}\right) \text{ الشكل}$$

فالحد الأول من العلاقة (9) يأخذ الشكل التالي :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} \left(\frac{Z}{R_3} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} \left(\frac{t}{R_3} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} (-1)^k \left(\frac{e_4}{R_3} \right)^k \cdot \left(1 - \frac{t+e_4}{e_4} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} \sum_{n=0}^k (-1)^{k+n} \cdot C_k^n \left(\frac{e_4}{R_3} \right)^{k-n} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^n \cdot \left(\frac{t+e_4}{R_4} \right)^n \end{aligned}$$

وبالأخذ بالاعتبار المطابقة التالية [1] :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dots \sum_{n=0}^k \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dots \sum_{k=n}^{\infty} \dots$$

نجد :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(3)} \left(\frac{t}{R_3} \right)^k = a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \left(\frac{t+e_4}{R_4} \right)^n \quad (27)$$

حيث :

$$a_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} \cdot C_k^n \left(\frac{e_4}{R_3} \right)^{k-n} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^n \cdot a_k^{(3)}$$

والحد الثاني من العلاقة (3) يأخذ الشكل التالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{R_4}{t+e_4} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_n^{(3)} \left(\frac{R_4}{t+e_4} \right)^n \quad (28)$$

وبالتالي :

$$\varphi_3(t) = a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cdot \left(\frac{t-e_4}{R_4} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(3)} \left(\frac{R_4}{t+e_4} \right)^n \quad (29)$$

$$\overline{\varphi_3(t)} = a_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \cdot \left(\frac{R_4}{t-e_4} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(3)} \left(\frac{t+e_4}{R_4} \right)^n \quad (30)$$

وباعتبار أنه على المحيط L_4 لدينا [1] :

$$\begin{aligned} t \cdot \bar{t} &= \left(-e_4 + R_4 \cdot e_4^{i\theta} \right) \left(-e_4 + R_4 \cdot e_4^{-i\theta} \right) \\ &= -e_4 \cdot R_4 \left(\frac{t+e_4}{R_4} + \frac{R_4}{t+e_4} \right) + (e_4^2 + R_4^2) \end{aligned}$$

وبالتالي العلاقة (9) تأخذ الشكل التالي :

$$\varphi_3(t) + \overline{\varphi_3(t)} = -e_4 \cdot R_4 \left(\frac{t+e_4}{R_4} + \frac{R_4}{t+e_4} \right) + d_1$$

حيث :

$$d_1 = e_4^2 + R_4^2 + C_4$$

وبتعويض $\varphi_3(t)$ و $\overline{\varphi_3(t)}$ بما يساويها [العلاقتان 29-30] في (6) نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(a_n^* + b_n^{(3)} \right) \cdot \left[\left(\frac{t+e_4}{R_4} \right)^n + \left(\frac{R_4}{t+e_4} \right)^n \right] \right\} + 2 \cdot a_0^* =$$

$$-e_4 \cdot R_4 \cdot \varepsilon(n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t+e_4}{R_4} + \frac{R_4}{t+e_4} \right) + d_1$$

حيث :

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } n=1 \\ \text{عندما } n \neq 1 \end{array} \right\} = \varepsilon(n)$$

وبمقارنة الحدود المتشابهة وذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على :

$$a_n^* + b_n^{(3)} = -e_4 \cdot R_4 \cdot \varepsilon(n) \quad (31)$$

و الثابت :

$$C_4 = 2 \cdot a_0^* - (R_4^2 + e_4^2)$$

و بتعويض a_0^* بما يساويها نحصل على :

$$C_4 = 2 \cdot a_n^{(3)} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{e_4}{R_3} \right)^k \cdot a_k^{(3)} - (R_4^2 + e_4^2)$$

وبالتالي مجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية هي (12, 17, 18, 25, 26, 31) :

$$\begin{aligned}
 a_n^{(1)} + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \cdot b_n^{(1)} &= 0 \\
 a_n^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n - b_n^{(1)} - a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n &= 0 \\
 \mu_1 \cdot \left[a_n^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n + b_n^{(1)} \right] - \mu_2 \cdot \left[a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \right] &= 0 \\
 \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} - b_n^{(2)} - a_n^{(3)} + b_n^* &= 0 \\
 \mu_2 \cdot \left[\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \right] - \mu_3 \cdot \left[a_n^{(3)} + b_n^* \right] &= 0 \\
 a_n^* + b_n^{(3)} &= -e_4 \cdot R_4 \cdot \varepsilon(n)
 \end{aligned}$$

واستناداً للأساس النظري [4,5] بشأن وجود حل ذي مدلول واحد لمسائل نظرية المرونة المستوية نستطيع القول بأن مجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية الستة (12,17,18,25,26,31) لها حل وحيد ومحدد

و يمكن الحصول على هذا الحل بأخذ عدد محدد (N) من المعادلات من كل مجموعة من المجموعات الثلاث ، فمثلاً إذا أخذنا الحدود الخمسة الأولى (N = 5) من كل مجموعة من المجموعات الست فإننا نحصل على (6) (5 = 30) ثلاثون معادلة . ومن ثم نعين جذور تلك المعادلات " المعاملات الثابتة لسلسلة القوى " $\{ (a_k^i, b_k^i ; (j=1,2) ; (k=1,2,3,4,5)) \}$.
وبالتالي من خلالها نعين التابع العقدي $\varphi_j(z) ; (j=1,2,3)$ التحليلي في الساحة $S_j (j = 1,2,3)$.
أما لحساب الإجهادات المماسية فإننا نطبق العلاقة التالية [1] :

$$\tau_{xz} - i \tau_{xy} = \mu_j \cdot \theta \cdot i \left[\varphi_j'(z) - \bar{Z} \right] ; (j=1,2,3) \quad (32)$$

حيث :

$$\theta - \text{ثابت الفتل "زاوية الفتل النسبية" ويساوي إلى : } \frac{M_t}{D} .$$

M_t - عزم الفتل المطبق .

D - صلابة المقطع العرضي للفضيب على الفتل وتعطى بالعلاقة [3] :

$$D = \mu_i \cdot \left[I_0 - \frac{i}{4} \sum_{i=1,2,3,4} \oint_{l_i} (\varphi_i(t) - \overline{\varphi_i(t)}) \cdot d(t \cdot \bar{t}) \right] \quad (33)$$

I_0 - عزم العطالة القطبي للمقطع العرضي بالنسبة لمبدأ الإحداثيات .

\bar{z} - نظير النقطة $z(x, y) = x + iy$ المطلوب حساب الإجهادات فيها.

$\varphi'_j(z)$; $(j = 1, 2, 3)$ - مشتق التوابع العقدية التي حصلنا عليها وتعطى بالعلاقات التالية :

$$\varphi'_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{k}{R_1} \right) \cdot \left(\frac{z}{R_1} \right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{k}{R_2} \right) \cdot \left(\frac{R_2}{z} \right)^{k+1}$$

$$\varphi'_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \left(\frac{k}{R_2} \right) \cdot \left(\frac{z}{R_2} \right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \left(\frac{k}{R_3} \right) \cdot \left(\frac{R_3}{z} \right)^{k+1}$$

$$\varphi'_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(3)} \left(\frac{k}{R_3} \right) \cdot \left(\frac{z}{R_3} \right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(3)} \left(\frac{k}{R_4} \right) \cdot \left(\frac{R_4}{z + e_4} \right)^{k+1}$$

الجزء العملي والمناقشة :

لقد تم وضع برنامج عام بلغة (Q . BASIC) يسمح بحل عدة مسائل بمعطيات " هندسية وفيزيائية " مختلفة .

ففي المثال التطبيقي الأول تم إدخال المعطيات الهندسية النسبية التالية بدلالة R_1 وهي :

$$\left(\begin{array}{l} R_2 = 0,8 \cdot R_1 ; R_3 = 0,6 \cdot R_1 ; \\ R_4 = 0,2 \cdot R_3 ; e_4 = 0,6 \cdot R_3 \end{array} \right)$$

والمعاملات الفيزيائية التالية :

$$\mu_1 = 80 \text{ MPa (Steel)}$$

$$\mu_2 = 40 \text{ MPa (Copper)}$$

$$\mu_3 = 25 \text{ MPa (Aluminum)}$$

أما في المثالين الثاني و الثالث فقد تم إدخال الأبعاد الهندسية نفسها ولكن مع تبديل أمكنة توضع المواد في الأنبوب ، ففي المثال الثاني كانت :

$$\mu_1 = 25 \text{ MPa (Aluminum)}$$

$$\mu_2 = 40 \text{ MPa (Copper)}$$

$$\mu_3 = 80 \text{ MPa (Steel)}$$

وفي المثال الثالث كانت :

$$\mu_1 = 40 \text{ MPa (Copper)}$$

$$\mu_2 = 80 \text{ MPa (Steel)}$$

$$\mu_3 = 25 \text{ MPa (Aluminum)}$$

وتم حساب الإجهادات في نقاط محددة (Z) ، من العلاقة (32) وبدلالة $(R_1 \cdot M_t)$.

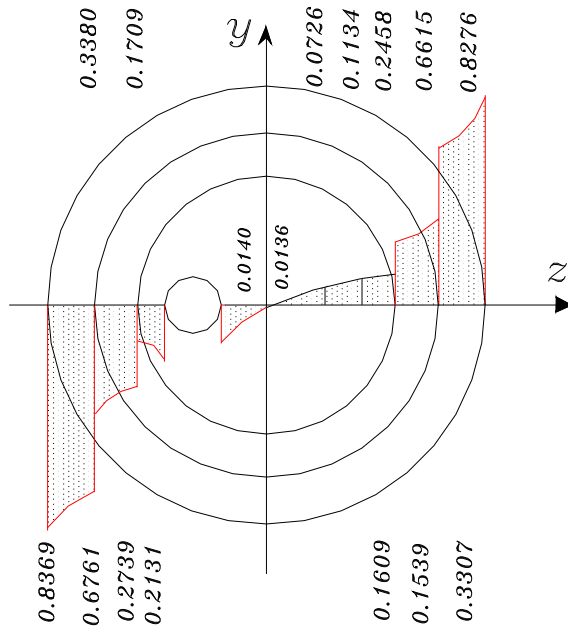
أما بالنسبة للمسألة الخاصة ، فقد حسبت الإجهادات بدلالة $(\mu_1 \cdot R_1 \cdot \theta)$ وذلك ليتسنى لنا مقارنة النتائج مع نتائج مسألة محلولة (Amenzade , 1967) تشابه مسألتنا الخاصة ، حيث تم إدخال الأبعاد الهندسية و الفيزيائية التالية :

$$\left(\begin{array}{l} R_2 = R_3 = R_1 ; R_4 = 0,2 \cdot R_1 ; e_4 = 0,6 \cdot R_1 ; \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu . \end{array} \right)$$

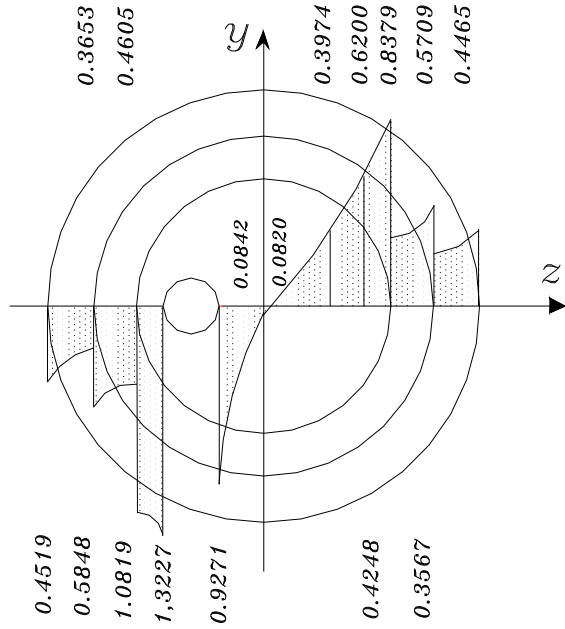
وللتوضيح نظمت قيم الإجهادات ضمن الجدول (1) ، ورسمت مخططات توزيعها ، الأشكال (2,3,4) .

الجدول (1) :

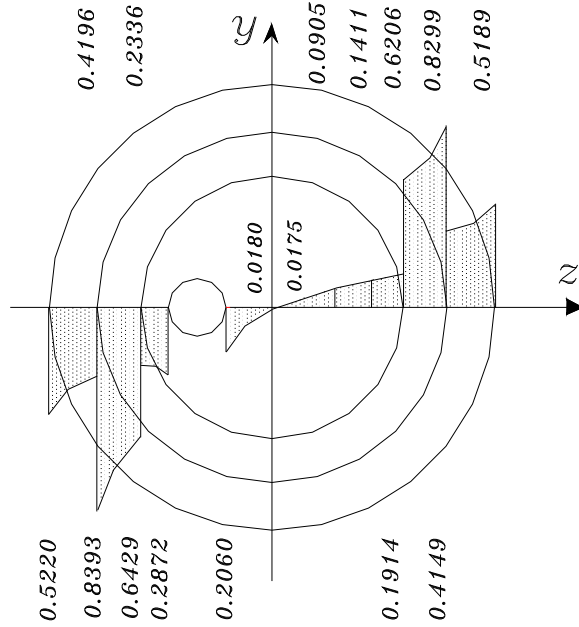
$(R_1 \cdot M_t) \times \tau_{xy}$ للمثال الثالث	$(R_1 \cdot M_t) \times \tau_{xy}$ للمثال الثاني	$(R_1 \cdot M_t) \times \tau_{xy}$ للمثال الأول	النقاط (Z)
- 0,5189	- 0,4465	- 0,8276	R_1
- 0,4149 -0,2899	- 0,3567 -0,5709	- 0,6615 - 0,3307	R_2
- 0,6206 - 0,1914	- 0,4248 - 0,8379	- 0,2458 - 0,1539	R_3
- 0,1411	- 0,6200	- 0,1134	$0,75 \cdot R_3$
- 0,0905	- 0,3974	- 0,0726	$0,5 \cdot R_3$
0,0175	0,0820	0,0136	$0,001 \cdot R_3$
0,0180	0,0842	0,0140	$-0,001 \cdot R_3$
0,2060	0,9271	0,1609	$-(e_4 - R_4)$
0,2872	1,3227	0,2131	$-(e_4 + R_4)$
0,2336 0,6429	1,0819 0,4605	0,1709 0,2739	$-R_3$
0,8393 0,4196	0,5845 0,3653	0,3380 0,6761	$-R_2$
0,5220	0,4519	0,8369	$-R_1$



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

أما صلابة المقطع العرضي على الفتل (D) فقد تم حسابها بشكل مستقل عن الإجهادات لنتمكن من مقارنة النتائج من جهة ومعرفة تأثير (D) على قيم الإجهادات من جهة أخرى [7].

هذا الحساب جرى بتطبيق العلاقة (33) ضمن برنامج الحاسب آخذين بعين الاعتبار أن :

على المحيط L_1 لدينا :

$$t \cdot \bar{t} = R_1^2 \Rightarrow d(t \cdot \bar{t}) = d R_1^2 = 0$$

وعلى المحيط L_2 لدينا :

$$t \cdot \bar{t} = R_2^2 \Rightarrow d(t \cdot \bar{t}) = d R_2^2 = 0$$

وعلى المحيط L_3 لدينا :

$$t \cdot \bar{t} = R_3^2 \Rightarrow d(t \cdot \bar{t}) = d R_3^2 = 0$$

على المحيط L_4 لدينا :

$$d(t \cdot \bar{t}) = -(R_4 \cdot e_4) \cdot d \left(\frac{R_4}{t + e_4} + \frac{t + e_4}{R_4} \right)$$

وبالتعويض وإجراء بعض العمليات الرياضية البسيطة وجد أن :

صلابة المجال " الوسط " الأول للقضيب على الفتل :

$$D_1 = \frac{\pi \cdot \mu_1}{2} (R_1^4 - R_2^4)$$

وصلابة المجال الثاني للقضيب على الفتل :

$$D_2 = \frac{\pi \cdot \mu_2}{2} (R_2^4 - R_3^4)$$

وصلاية المجال الثالث للقضيب على الفتل :

$$D_3 = \frac{\pi \cdot \mu_3}{2} \cdot \left[\left(R_3^4 - R_4^4 - 2 \cdot R_4^2 \cdot e_4^2 \right) - 2 \cdot R_4 \cdot e_4 \cdot \left(a_1^* - b_1^{(3)} \right) \right]$$

و بالتالي صلاية المقطع العرضي على الفتل للقضيب المدروس ككل هي :

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

أما بالنسبة للمسألة الخاصة والتي تتطابق كما ذكرنا مع مسألة محلولة في المرجع [1] ، فإن D

تساوي :

$$D = \frac{\pi \cdot \mu}{2} \cdot \left[\left(R_1^4 - R_4^4 - 2 \cdot R_4^2 \cdot e_4^2 \right) - 2 \cdot R_4 \cdot e_4 \cdot \left(a_1^* - b_1^{(3)} \right) \right]$$

النتائج :

يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي :

- 1 - باستخدام طريقة التتابع العقدي تم حل إحدى مسائل نظرية المرونة المستوية ، وإيجاد موديل حسابي لتعيين الإجهادات المماسية في قضيب دائري مكون من مواد مختلفة ويتعرض لعزم فتل
- 2 - إن عدد المعادلات المأخوذ من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية 12,17,18,25 (26,31) يتعلق بدقة الحل المطلوبة وقد تبين أن (N=5) يعطي نتائج ذات دقة مقبولة .
- 3 - إن البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة (Q.BASIC) هو برنامج عام نستطيع من خلاله حل المعادلات الناتجة عن تحديد قيمة اختيارية لـ (N) ، وبالتالي تعيين قيم المعاملات الثابتة لسلسلة القوى ، ومن ثم حساب قيم الإجهادات في نقاط محددة بأبعاد هندسية نسبية تتغير بتغير الأبعاد الهندسية للمسألة المدروسة .
- 4 - لقد تم إدخال الأبعاد الهندسية $(R_1, R_2, R_3, R_4, e_4)$ كنسبة من (R_1) وذلك ليتسنى لنا حل عدة مسائل وبمعطيات هندسية مختلفة ، علماً أن صلاية المقطع العرضي على الفتل (D) تتغير تلقائياً وفق الأبعاد الهندسية والمعاملات الفيزيائية وأمكنة توضع المواد الداخلة في تكوين القضيب المدروس .
- 5 - إن اختيار الأبعاد الهندسية (R_2, R_3, R_4, e_4) له تأثير كبير على تركيز الإجهادات في أمكنة اتصال المواد المكونة للقضيب ، والتي لها أهمية كبيرة على متانة القضيب المدروسة .
- 6 - إن اختيار ترتيب توضع المواد المركبة للأنبوب له تأثير كبير على تركيز الإجهادات في أمكنة اتصال تلك المواد، والتي لها تأثير واضح على توزع الإجهادات في المقطع العرضي و بالتالي تأثير كبير على متانة القضيب المدروسة .
- 7 - لقد تم حساب الثابت C_i ($i = 4$) وتعويضه في الشروط الحدودية للمسألة " المعادلة 9 " فكان الخطأ المرتكب في تحقيق تلك الشروط لا يتجاوز القيمة % 4 .

- 8 - إن النتائج التي تم الحصول عليها للمسألة الخاصة تتطابق مع النتائج العددية للمسألة نفسها والموجودة بالمرجع (Amenzade , 1967) .
- 9 - إن قيم الإجهادات التي تم الحصول عليها نظمت ضمن جداول ومخططات ليسهل استخدامها .

REFEREANCES

- 1- AMENZADE U.A , 1967 - theory of elasticity. high school , Moscow , 271 P .
- 2- BAHTEYAROF U.A , 1972 - on the torsion of prismatic beams with a doubly connected domain Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series , NO . 4 , 32 - 36 .
- 3- MUSKHELISHVILI N.I , 1966 - Some basic Problems of the Mathematical theory of elasticity . Nauka , Moscow , 707 P .
- 4- PARTON B.Z and PERLEN P.U , 1977 integral equations of the theory of elasticity . Nauka , Moscow , 311 P .
- 5- SHERMAN D.I , 1972 - on a method of Treatment of boundary - Value problems of The Theory of Functions and two-Dimensional Problems of the theory of elasticity , continuum mechanics and Related problems of analysis , NO . 1 , 635 - 665 .
- 6- TIMOSHENKO S.P and GOODIER J.N , 1957 - theory of elasticity . Mc Graw - Hill BOOK company , New York , 575 P .
- 7- Ihssan Tarsha, Torsion of Circular Bar With Tow Longitudinal Circular Hall, Science Week 37 in Damascus, Vol.1,1997.
- 8- Ihssan Tarsha, Using The Complex Functions to Compute the Stresses in a Plate Interconnected by Force, Journal of Bassel AL-Assed for Engineering Sciences, Vol.1,1997.