

# Solving some of the third fundamental Boundary Problems by Conformal Mapping

Dr. Eng. IHSSAN TARSHA  
CIVIL ENG.  
ALBAATH UNIVERSITY

Eng. SOHA WAHBY  
CIVIL ENG.  
ALBAATH UNIVERSITY

## Abstract

This paper presents the using of conformal transformation or mapping to solve some of the third fundamental boundary problems form two-dimensional elasticity for plane stress. The problem consists of composite (built-up) plate bounded by the simple closed curve that is known as Jordan's curve such as "square, hexagon, octagon, equilateral triangle, and elliptical cross-section".

The plate was interconnected by force a circular ring subjected to uniform internal pressure  $P_3$  at contour  $L_3$ .

To determine the stresses  $(\sigma_x; \sigma_y)$  in the presented problem we will look for the stress function in each domain or region  $S_j$  ( $j=1,2$ ) at complex form using complex variables method and conformal mapping.

The complex stress functions can be found in the Laurent series expansions.

from the boundary conditions the values of the constant " coefficients of Laurent's series " Can be determined by solution a set of linear algebraic equations.

*Keywords: Complex Variables, Conformal Mapping, Laurent series, Boundary Conditions.*

# حل بعض المسائل الحدودية الأساسية باستخدام التمثيل المطابق

د.م إحسان الطرشة  
أستاذ بكلية الهندسة المدنية  
في جامعة البعث

م . سهى وهبي  
مشرفة على الأعمال  
بكلية الهندسة المدنية في جامعة البعث

## ملخص البحث :

يتعرض هذا البحث لاستخدام التصوير *mapping* أو التمثيل المطابق " *Conformal transformation* " في حل بعض المسائل الحدودية الأساسية الثالثة من مسائل نظرية المرونة ذات حالة إجهادية مستوية ، وهي عبارة عن صفيحة مجمعة " *Composite or Built-up* " محيطها " *Contour* " الخارجي عبارة عن منحن بسيط مغلق " *Simple closed curve* " وهو ما يعرف بمنحني جوردان " *Jordan curve* " ، وستأخذ مقاطعها العرضية الأشكال " مربع - مسدس - مثلث متساوي الأضلاع - قطع ناقص " ، ومغروس بها بشكل قسري " *Interconnected by Force* " حلقة دائرية معرضة لضغط داخلي  $P_3$  موزع بانتظام على كامل محيطها الداخلي  $L_3$  . ولتعيين الإجهادات  $(\sigma_x; \sigma_y)$  التي ستتشتأ في المسألة المدروسة سنجري البحث عن توابع الإجهادات في كل مجال  $S_j$  ( $j=1,2$ ) بالشكل العقدي ، مستخدمين طريقة المتغيرات العقدية " *Complex Variables Method* " والتصوير المطابق .

إن توابع الإجهادات التي سنبحث عنها ستكون على شكل سلسلة قوى " منشور سلسلة لورانت " ، معاملاتها أو أمثالها الثابتة تحدد بحل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية والتي يتم الحصول عليها من الشروط الحدودية " *Boundary Conditions* " للمسألة المدروسة.

الكلمات المفتاحية: متغيرات عقدية ، تمثيل مطابق ، سلسلة لورانت ، الشروط الحدودية .

## المقدمة :

إن استخدام طريقة المتغيرات العقديّة " *Complex Variables* " من قبل الباحثين [8] Muskhelishvili ، [5] Sokolinkoff ، G.V.Kolosoff و [7] Markushevich ، وغيرهم ساعد في حل العديد من مسائل المرونة وذلك باستخدام تكاملات لبعض المعادلات التفاضلية الشاذة وما يرافق ذلك من صعوبة رياضية ، حتى أوجد Sherman ، Amenzade [1] و [2] Bahtayarof ، طرقاً تحليلية عددية يمكن استخدام الكمبيوتر فيها ، وبالتالي لاقت طريقة المتغيرات العقديّة انتشاراً واسعاً في حل مسائل المرونة الحدودية الأساسية الثلاث ، حيث في المسألة الأساسية الأولى نجد قيم الإجهادات الداخلية عندما تكون الإجهادات المؤثرة على الحدود الخارجية للمسألة معلومة ، وفي المسألة الأساسية الثانية يتم حساب قيم الإجهادات الداخلية بمعرفة قيمة انتقالات النقاط الحدودية للمسألة . وننوه هنا لأعمال الباحث الأمريكي Ballarini, R في جامعة C.W.R.U والتي تضمنت بحثاً متعددة في استخدام التوابع العقديّة .

أما في هذا البحث فإننا سنعالج المسألة الحدودية الأساسية الثالثة والتي تدعى بالمسألة المختلطة " حساب الإجهادات في أي نقطة عندما تكون الإجهادات والانتقالات على حدود المسألة معطاة " وهي من مسائل المرونة ذات الحالة الإجهادية المستوية ، وهي عبارة عن صفيحة محاطة من الخارج بمنحن أملس " *smooth curve* " ، ويمكن لهذا المنحني أن يأخذ عدة أشكال هندسية .

هذه الصفيحة مجمعة بالتداخل القسري مع حلقة دائرية ، ومعرضة لضغط داخلي منتظم ، ولحساب الإجهادات الناشئة فيها سنستخدم طريقة المتغيرات العقديّة " *Complex Variables Method* " ونظراً لكون المحيط الخارجي للصفيحة غير دائري سندخل مفهوم التصوير أو التمثيل المطابق " *Conformal transformation - mapping* " .

## ملاحظة :

• المنحني الأملس هو منحني بسيط مغلق " *Simple closed curve* " ويدعى بمنحني جوردان ومن أهم خواصه وجود مماس وحيد في كل نقطة على محيط هذا المنحني

• إن توابع الإجهادات تدعى أيضاً بتوابع الكمون العقدي " *complex potential functions* .

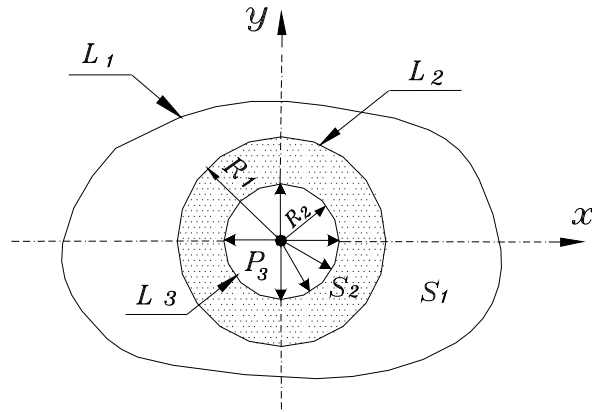
إن توابع الإجهادات هي توابع تحليلية " *analytic functions* " في كل مجال أو ساحة " *domain or region* " ويجري البحث عنها على شكل سلسلة قوى " منشور سلسلة لورانت - *Laurent series expansions* " معاملاتها الثابتة تحدد بحل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية والتي تم الحصول عليها من الشروط الحدودية والتلامسية " *Boundary Conditions* " للمسألة المدروسة .

### هدف البحث وطريقته :

في هذا البحث سوف نعالج تحليلياً ورياضياً مسألة توزع الإجهادات بصفيحة رقيقة محيطها " *Contour* " الخارجي عبارة عن منحني جوردان " *Jordan curve* " مجمعة " *Composite or Built-up* " بالتداخل القسري " *heavy-force* " مع حلقة دائرية لها سماكة الصفيحة نفسها و متمركزة معها، الشكل (1) .

وسنبحث في حالات خاصة موافقة لشكل محدد للمحيط الخارجي " مربع - مسدس - مثلث متساوي الأضلاع - قطع ناقص " [ الأشكال (2-3-a,c,e,g) ] .

إن هذه الصفيحة المجمعة المدروسة تدعى بالمفهوم العقدي ساحة ثنائية الترابط " *Binary connected domain* " ويمكن أن تعتبر مكونة من ساحتين أو مجالين  $S_j$  (j=1,2) ، كل منهما يمكن أن يكون مؤلفاً من مواد مختلفة معاملات القص وثوابت المرونة الموافقة هي  $\mu_j, \chi_j$  (j=1,2) ، وتخضع لضغط داخلي  $P_3$  موزع بانتظام.



الشكل (1) : الصفحة المجمعة المدروسة

إن حل المسألة المذكورة يتم بالبحث عن زوجين من التوابع العقدية  $\varphi_j(z), \psi_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ) التحليلية والمنتظمة في المجالات  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) ،  
 بشكل سلسلة لورانت " Laurent Series " وفق الشكل التالي [1] :

$$\begin{cases} \varphi_1(z) \\ \psi_1(z) \end{cases} = \sum_{k=0}^N \begin{Bmatrix} a_k^{(1)} \\ A_k^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \frac{z}{A} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} b_k^{(1)} \\ B_k^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \frac{R_2}{z} \right)^k \quad z \in S_1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi_2(z) \\ \psi_2(z) \end{cases} = \sum_{k=0}^N \begin{Bmatrix} a_k^{(2)} \\ A_k^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{z}{R_2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} b_k^{(2)} \\ B_k^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{R_1}{z} \right)^k \quad z \in S_2 \quad (2)$$

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{حيث :}$$

- $a ; b$  : نصفي قطري كل من الدائرتين المماسّة داخلياً وخارجياً للمحيط الخارجي  $L_1$  .
- $N$  : عدد معين ثابت قيمته تتعلق بدقة الحل المطلوبة ، ولتسهيل التشكيلات الرياضية التي سنجرىها سنفرض أن  $(N = \infty)$  ، وهذا الفرض ممكن كما سنرى في الحل العددي لأن كل مجموعة من مجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية التي سنحصل عليها سيتم فتحها بعدد محدد من الحدود تكفي لدقة الحل المطلوبة .

- المتغير العقدي ومرافقه في المجال  $(\bar{z} = x - iy ; z(x,y) = x + iy)$
- المدروس  $S_j (j = 1,2)$  الواقع في المستوي العقدي  $(Z)$  ، وفقاً لجملة ديكرتية.
- هي الأمثال أو المعاملات الثابتة  $a_k^{(j)}, A_k^{(j)}, b_k^{(j)}, B_k^{(j)} ; (j=1,2 ; k=1,N)$  :  
المجهولة والتي يطلب تحديد قيمها وتسمى بمعاملات سلسلة القوى " منشور سلسلة لورانت " .

إن التوابع العقدية المفروضة يجب أن تحقق الشروط الحدودية " Boundary Conditions " الطرفية والتلامسية التالية [ 2 ] :

على المحيطين " Contours "  $(L_1)$  و  $(L_3)$  ، لدينا :

$$\varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} = f_j(t) + C_j \quad (j = 1,3) \quad (3)$$

وعلى المحيط  $(L_2)$  لدينا :

$$\frac{1}{\mu_1} [\chi_1 \cdot \varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] - \frac{1}{\mu_2} [\chi_2 \cdot \varphi_2(t) - t \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)}] = 2g(t) \quad (4)$$

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} \quad (5)$$

حيث :

$$f_j(t) = f_1(t) + if_2(t) = \int_0^l (X_n + Y_n) dl. \quad (j = 1,3)$$

- هي توابع " حقيقية أو عقدية " معطاة وتمثل الحملات الخارجية على كل محيط  $L_j (j = 1,3)$  " تأخذ إشارة (+) في حالة الشد و (-) في حالة الضغط ، وهي وحيدة التعيين ومستمرة في كافة النقاط  $t$  الواقعة على المحيط الموافق .  
- مسطوي الحملات الخارجية على المحورين الإحداثيين  $ox$  و  $oy$  والمؤثرة في كل نقطة  $t$  واقعة على المحيط  $L_j (j = 1,3)$  .

ملاحظة:

في المسألة المدروسة لدينا :  $f_3(t) = P_3(t)$  ;  $f_1(t) = 0$  .

$t$  - دليل النقاط على المحيط  $(j = 1 \rightarrow 3)$  في المستوى العقدي  $(Z)$  .

$\chi_j (j=1,2)$  - ثوابت المرونة وتعطى للحالة الإجهادية المستوية بالعلاقة :

$$\chi_j = \frac{3-v_j}{1+v_j} \quad ; \quad (j=1,2) \quad (6)$$

وللحالة الانفعالية " التشوهية " المستوية بالعلاقة :

$$\chi_j = 3 - 4.v_j \quad ; \quad (j = 1,2)$$

$v_j (j=1,2)$  - معامل بواسون .

$g(t)$  - تابع معلوم ويعبر عن القيمة الحدية لمركبات الانتقال  $(u, v)$  " على

المحيط  $L_2$  الفاصل بين الساحة  $S_1$  والساحة  $S_2$  " ويساوي [14]:

$$g(t) = g_1 + g_2 = u + iv = \frac{\delta R_2}{R_2} t$$

$\delta R_2$  - قيمة التداخل القسري " التوتير - *Interference* " بين الحلقة الدائرية

والصفحة المربعة " النقاط الواقعة على المحيط  $L_2$  " .

$C_j (j=1,2)$  - ثوابت تحدد أثناء حل المسألة ، ويكن افتراض قيمة محددة لإحداها والتي

يمكن أن تأخذ الصفر .

$\mu_j (j=1,2)$  - ثوابت لامي وهي معاملات فيزيائية تتعلق بالمادة وتتطابق مع معاملات

القص  $G$  .

بما أن المحيط  $L_1$  في المستوى العقدي  $(Z)$  ليس دائرياً لذلك نستخدم التصوير

المطابق " *Conformal mapping* " أو التحويل المطابق " *Conformal transformation* "

لتحويله إلى دائرة الوحدة  $(\gamma)$  " وهي دائرة نصف قطرها يساوي الواحد  $|\xi| = 1$  " الواقعة

في المستوى العقدي المساعد  $(\zeta)$  ويتم ذلك باستخدام التابع التالي [8] :

$$Z = W(\zeta) = A \cdot \left( \zeta + \frac{m}{\zeta^{q-1}} \right)$$

وبالتالي على المحيط  $L_1$  تأخذ الشكل التالي [13]:

$$t = A. \left( \tau + \frac{m}{\tau^{q-1}} \right) \quad (7)$$

حيث :

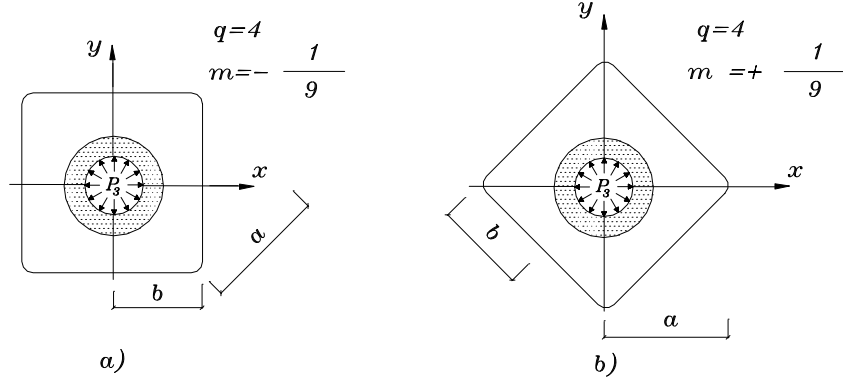
- في حال كون المحيط  $L_1$  " مثلث - مسدس - مثنى - مربع " تؤخذ [15] :

$$m = \pm \frac{1}{(q-1)^2}$$

- في حالة كون المحيط  $L_1$  " قطع ناقص " تؤخذ :  $m = \pm \frac{a-b}{a+b}$

ملاحظة :

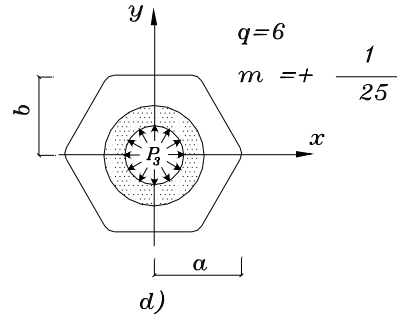
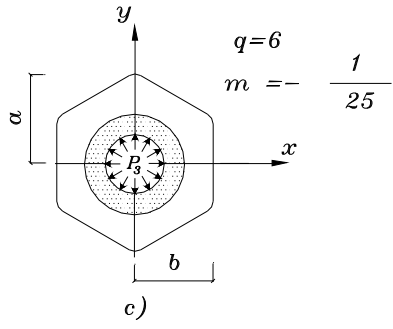
- الإشارة (+) تؤخذ عندما ينطبق محور التناظر الأعظمي للمحيط  $L_1$  مع المحور (ox) ، وما خالف ذلك تؤخذ الإشارة (-) .
- $\tau$  - دليل النقاط على محيط دائرة الوحدة ( $\gamma$ ) الواقعة في المستوي العقدي ( $\zeta$ ) .
- $q$  - عدد محاور التناظر للمحيط  $L_1$  المدروس .



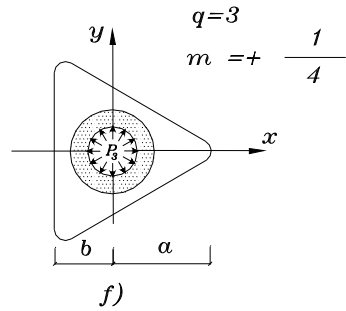
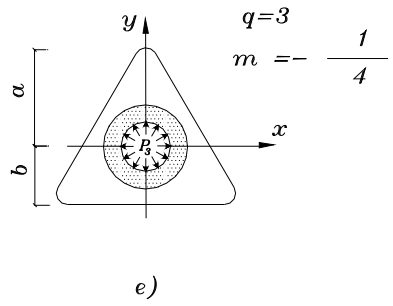
الشكل (2)

a-b المحيط الخارجي مربع

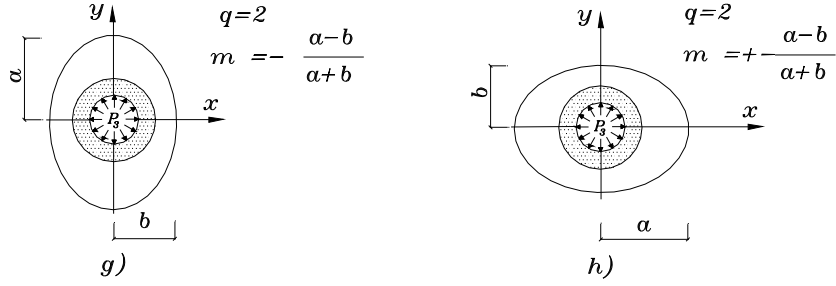




(3) الشكل  
c-d المحيط الخارجي سدس



(4) الشكل  
e-f المحيط الخارجي مثلث



الشكل (5)

المحيط الخارجي قطع ناقص g-h

لتعويض القيمة الحدودية للتابع (1) على المحيط  $L_1$  في الشروط الطرفية (3) ،  
 نجري عدد من العمليات الرياضية تمكننا من مقارنة العوامل المتغيرة المتشابهة ( $\tau^n$  ;  $\tau^{-n}$ )  
 وذات الأس المتساوي مع بعضها البعض ، فنجد أن تشكيل الحد الأول من العلاقة (1)  
 وبالأخذ بعين الاعتبار (7) ، يتم وفق التالي :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left( \frac{t}{A_1} \right)^k &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \tau^k \left( 1 + \frac{m}{\tau^q} \right)^k \\ &= a_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{v=0}^k C_k^v m^v \cdot \frac{1}{\tau^{qv-k}} \end{aligned}$$

حيث :  $C_k^v = \frac{k!}{(k-v)! \cdot v!}$  ، ويفرض أن :  $n = q \cdot v - k$  نجد :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left( \frac{t}{A_1} \right)^k &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \sum_{n=-k}^{k(q-1)} C_k^{\frac{n+k}{q}} \cdot m^{\frac{n+k}{q}} \cdot \frac{1}{\tau^n} \\ &= a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \sum_{n=k-qE\left(\frac{k}{q}\right)}^k C_k^{\frac{k-n}{q}} \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \tau^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \sum_{n=qE\left(\frac{k}{q}\right)-k+q}^{k(q-1)} C_k^{\frac{k+n}{q}} m^{\frac{k+n}{q}} \tau^{-n} \end{aligned}$$

- -

ولكن [8] :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k-q.E\left(\frac{k}{q}\right)}^{k*} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=q.E\left(\frac{k}{q}\right)-k+q}^{k.(q-1)*} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\frac{n+q.\alpha}{q-1}}^{\infty} \dots$$

فالحدين الأخيرين من العلاقة السابقة يمكن كتابتهما بالشكل :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \left(\frac{t}{A}\right)^k = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} \quad (8)$$

حيث :

$$H_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot a_k^{(1)} \quad (9)$$

$$M_n = \sum_{k=\frac{n+q.\alpha}{q-1}}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot a_k^{(1)} \quad (10)$$

• (\*) : وهي العلامة الموجودة فوق إشارة الجمع  $\sum$  ، وتعني بأن قيم  $k$  سوف تتزايد بالقيمة  $q$  .

•  $E\left(\frac{k}{q}\right)$  : تعني بأن قيمة الحد  $\left(\frac{k}{q}\right)$  تؤخذ مقربة إلى أكبر عدد صحيح .

•  $\alpha$  : أصغر عدد صحيح موجب يمكن تعويضه بحيث يكون  $\frac{n+q.\alpha}{q-1}$  بدون باق .

أما الحد الثاني :  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{z}\right)^k$  ، فيمكن تشكيله كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left(\frac{R_2}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^k$$

وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (7) نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{R_2}{t} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^k \cdot \sum_{v=0}^{\infty} C_{-k}^v \cdot m^v \cdot \frac{1}{\tau^{q \cdot v + k}}$$

$$C_{-k}^v = (-1)^v \cdot C_{k+v-1}^v \quad \text{حيث :}$$

وبفرض :  $n = q \cdot v + k$  نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \left( \frac{R_2}{t} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^k \sum_{n=k}^{\infty} C_{-k}^{\frac{n-k}{q}} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \tau^{-n}$$

وحيث أن :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots \sum_{n=k}^{\infty} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \dots \sum_{k=n-q \cdot E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^n \dots$$

نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \cdot \left( \frac{R_2}{t} \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (11)$$

حيث :

$$S_n = \sum_{k=n-q \cdot E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^n C_{-k}^{\frac{n-k}{q}} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^k \cdot b_k^{(1)} \quad (12)$$

عند تعويض العلاقتين (11,8) في (2) ، فإنها تأخذ الشكل التالي :

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(\tau) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (13)$$

وبشكل مشابه ننتقل من المتحول  $t$  إلى المتحول  $\tau$  على المحيط  $L_1$  للتتابع

: نجد  $\psi_1(t) = \psi_1(\tau)$

$$\psi_1(t) = \psi_1(\tau) = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \tau^{-n}$$

وبالتالي :

$$\overline{\psi_1(t)} = \overline{\psi_1(\tau)} = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \tau^n \quad (14)$$

حيث :

$$W_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot A_k^{(1)} \quad (15)$$

$$G_n = \sum_{k=\frac{n+q \cdot \alpha}{q-1}}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot A_k^{(1)} \quad (16)$$

$$F_n = \sum_{k=n-q \cdot E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^{n-1} C_{-k}^q \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^k \cdot B_k^{(1)} \quad (17)$$

أما القيمة الحدودية للتابع  $t\overline{\phi_1'(t)}$  على  $L_1$  وبعد الأخذ بعين الاعتبار العلاقة (7) ، وإجراء بعض العمليات البسيطة يمكن كتابتها بالشكل :

$$\begin{aligned} t\overline{\phi_1'(t)} &= \left[ A \cdot \left( \tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \right] \overline{\phi_1'(\tau)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \delta_n^1 \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + A \cdot m \cdot D_{n+q-1} - A \cdot m \cdot T_{n+q-1} \right] \cdot \tau^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^6 \cdot A \cdot m \cdot L_{n-q+1} + \delta_n^4 \cdot A \cdot m \cdot D_{q-n-1} - \delta_n^1 \cdot A \cdot m \cdot T_{q-n-1} \right] \cdot \tau^{-n} + \\ &+ A \cdot L_1 + A \cdot m \cdot D_{q-1} - A \cdot m \cdot T_{q-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

حيث :

$$\delta_n^3 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1 \\ 1 & \text{when } n \neq 1 \end{cases} \quad \delta_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1,2 \\ 1 & \text{when } n \geq 3 \end{cases} \quad \delta_n^1 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq 1 \\ 1 & \text{when } n=1 \end{cases}$$

$$\delta_n^5 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq q-1 \\ 1 & \text{when } n = q-1 \end{cases} \quad \delta_n^6 = \begin{cases} 0 & \text{when } n < q \\ 1 & \text{when } n \geq q \end{cases} \quad \delta_n^4 = \begin{cases} 0 & \text{when } n > q-2 \\ 1 & \text{when } n \leq q-2 \end{cases}$$

$q$  - عدد محاور التناظر للمحيط  $L_1$  المدروس .

- -

$$L_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{k+1}{A} \right) \cdot C_k^{\frac{k-n}{q}} \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (19)$$

$$D_n = \sum_{k=\frac{n+q}{q-1}}^{\infty} \left( \frac{k+1}{A} \right) C_k^{\frac{k+n}{q}} \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (20)$$

$$T_n = \sum_{k=n-q}^n \left( \frac{k-1}{A} \right) \cdot C_{-k}^{\frac{n-k}{q}} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^{k-1} \cdot b_{k-1}^{(1)} \quad (21)$$

وبتعويض (13، 14، 18) في (3) ، وبمقارنة المتحولات أو المتغيرات ذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على مجموعتين من المعادلات الجبرية الخطية التالية :

$$H_n + \delta_n^1 \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + m \cdot A \cdot D_{n+q-1} - m \cdot A \cdot T_{n+q-1} + G_n + F_n = 0 \quad (22)$$

$$M_n + S_n + A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^6 \cdot m \cdot A \cdot L_{n-q+1} + \delta_n^4 \cdot m \cdot A \cdot D_{q-n-1} - \delta_n^1 \cdot m \cdot A \cdot T_{q-n-1} + W_n = 0 \quad (23)$$

وللتعويض في الشرطين الحدوديين (5,4) ، نحتاج أيضاً لتشكيل التتابع  $\psi_j(z), \varphi_j(z)$  ( $j=1,2$ ) على المحيط  $L_2$  على شكل سلسلة قوى حدودها المتغيرة من الشكل  $\left( \frac{t}{R_2} \right)$  ، وبعد إجراء بعض التشكيلات الرياضية ، يمكننا أن نحصل على أربع

مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية وهي :

$$\begin{aligned} & \chi_1 \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^n \cdot a_n^{(1)} - \delta_n^1 \cdot \left( \frac{R_2}{A} \right)^n \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(1)} - B_n^{(1)} - \\ & - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \left[ \chi_2 \cdot a_n^{(2)} - \delta_n^1 \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{n-2} b_{n-2}^{(2)} - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^n B_n^{(2)} \right] = \\ & = 2 \cdot \delta_n^1 \cdot \mu_1 \cdot \delta R_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \chi_1 \cdot b_n^{(1)} - (n+2) \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(1)} - \left(\frac{R_2}{A}\right)^n A_n^{(1)} - \\ & - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \left[ \chi_2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n b_n^{(2)} - (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} - A_n^{(2)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} + \delta_n^1 \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^n \cdot a_n^{(1)} - \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(1)} + B_n^{(1)} - \\ & - (1 + \delta_n^1) \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-2} b_{n-2}^{(2)} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot B_n^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & b_n^{(1)} + (n+2) \cdot \left(\frac{R_2}{A}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(1)} + \left(\frac{R_2}{A}\right)^n A_n^{(1)} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n b_n^{(2)} - \\ & - (n+2) \cdot a_{n+2}^{(2)} - A_n^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

وللتعويض في الشرط الحدودي (6) ، نحتاج أيضا لتشكيل التتابع  $\psi_j(z), \varphi_j(z)$  ( $j=1,2$ ) على المحيط  $L_3$  على شكل سلسلة قوى حدودها المتغيرة من الشكل  $\left(\frac{t}{R_1}\right)$  ، وبعد إجراء بعض التشكيلات الرياضية البسيطة [9] ، نحصل على مجموعتين من المعادلات الجبرية الخطية :

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} + \delta_n^1 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot a_n^{(2)} - \delta_n^2 \cdot (n-2) \cdot b_{n-2}^{(2)} + B_n^{(2)} = -\delta_n^1 \cdot R_1 \cdot P_3 \quad (28)$$

$$b_n^{(2)} + (n+2) \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+2} \cdot a_{n+2}^{(2)} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \cdot A_n^{(2)} = 0 \quad (29)$$

وبالتالي نحصل على (8) مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية  
. (29,28,27,26,25,24,23,22)

## التطبيق العملي :

للحصول على نتائج عددية للمسألة المدروسة تم وضع برنامج عام بلغة Visual Basic 6.0 يسمح لنا بإدخال ( $q$ ) والأبعاد الهندسية ( $R_1; R_2; A$ ) والخواص الفيزيائية ( $\mu_j, \chi_j$ ) ( $j=1,2$ ) وبقيمة الضغط الداخلي  $P_3$  والتداخل القسري  $\delta R_2$  ، وذلك بأخذ أي عدد ( $N$ ) من الحدود المطلوبة من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية الثمانية (22,23,24,25,26,27,28,29) ، وبالتالي الحصول على ( $8 \times N$ ) معادلة جبرية خطية لحساب معاملات سلسلة القوي " الأمثال الثابتة "  $a_n^{(j)}, A_n^{(j)}, b_n^{(j)}, B_n^{(j)}$  ، ( $j=1,2; n=1 \rightarrow N$ ) والتي بحسابها نستطيع تعيين التوابع العقدية التحليلية ( $\varphi_j(z), \psi_j(z)$ ) ، ( $j=1,2$ ) في كل مجال  $S_j$  ( $j=1,2$ ) ، ومن ثم حساب الإجهادات النازمية والمماسية ( $\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}$ ) في نقاط محددة ( $z$ ) واقعة على المحور  $ox$  بتطبيق علاقة (G.V.Kolosoff & N.I.Muskhelishvili) [ 8 ] التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)} = 2.\text{Re}[\varphi_j'(z)] \\ \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \tau_{xy} &= \bar{z} \cdot \varphi_j''(z) + \psi_j'(z) \end{aligned} \right\} (j=1,2).$$

حيث أن :

$\tau_{xy}$  - الإجهاد المماسي .

$\sigma_x; \sigma_y$  - الإجهادات النازمية وفق المحورين الإحداثيين الديكارتيين .

Re - يشير إلى الجزء الحقيقي " Real part " من التابع الموافق .

تم حل مثالين عدديين ، في الأول تم أخذ المحيط ( $L_1$ ) عبارة عن صفيحة مربعة مغروس فيها حلقة دائرية لهما نفس السماكة ومكونين من مادة واحدة ، الشكل ( 2-a ) ، ولهما الأبعاد الهندسية والخواص الفيزيائية التالية :



$$R_1=1\text{ cm} ; \quad R_2 = 2\text{ cm} ; \quad a=5\text{ cm} \quad ; \quad q = 4 \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{9}$$

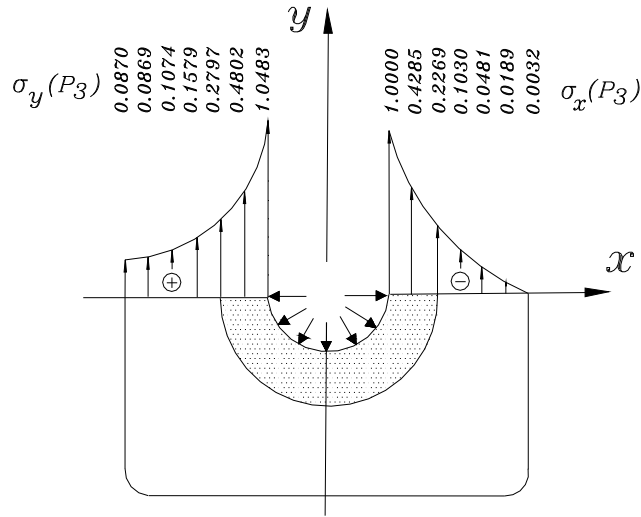
$$\mu_1 = \mu_2 = 7.9462 \cdot 10^4 \text{ MPa} \quad ; \quad \chi_1 = \chi_2 = 2.2 \quad \text{" فولاذ "}$$

وتخضع الحلقة لضغط داخلي موزع بانتظام مقداره ( $P_3$ ) وبقيمة للتداخل أو التوتير بين المربع والدائرة مقداره ( $\delta R_2$ ) .

وبأخذ الحدود العشرة الأولى ( $N = 10$ ) من كل من المجموعات الخطية الثمانية نحصل على (80) معادلة جبرية خطية تم حلها وحساب المعاملات الثابتة وتعيين توابع الإجهادات وقيم الإجهادات في نقاط محددة ، واقعة على المحور الحقيقي  $ox$  ، وللتوضيح نظمت تلك القيم ضمن الجدول (1) ، ورسمت مخططات الإجهادات الموافقة ، [ الأشكال (7-6) ] .

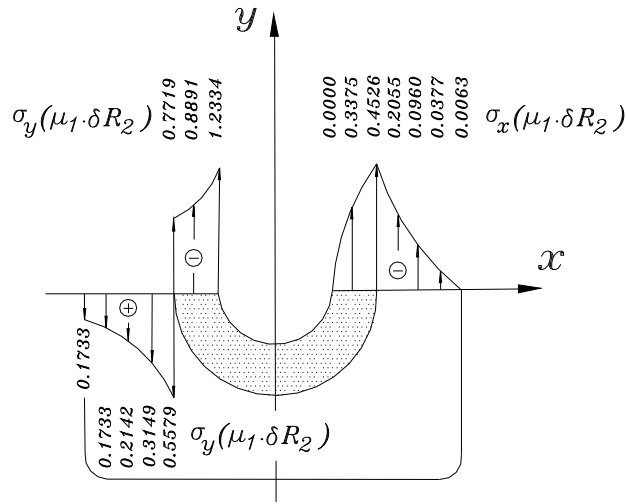
$Z$	$\sigma_x$		$\sigma_y$	
	$P_3$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$	$P_3$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$
$R_1$	-1.0000	-0.0000	+1.0483	-1.2334
$0.5(R_2 + R_1)$	-0.4285	-0.3375	+0.4802	-0.8891
$R_2$	-0.2269	-0.4526	+0.2797	-0.7719 +0.5579
$0.25(a + 3R_2)$	-0.1030	-0.2055	+0.1579	+0.3149
$0.5(a + R_2)$	-0.0481	-0.0960	+0.1074	+0.2142
$0.25(3.a - R_2)$	-0.0189	-0.0377	+0.0869	+0.1733
$a$	-0.0032	-0.0063	+0.0870	+0.1736

الجدول ( 1 ) : يبين قيم الإجهادات ( $\sigma_x ; \sigma_y$ ) بدلالة كل من ( $\mu_1 \cdot \delta R_2 ; P_3$ )



الشكل (6)

مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_y$  و  $\sigma_x$  تحت تأثير القوة الداخلية  $P_3$



الشكل (7)

مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_y$  و  $\sigma_x$  تحت تأثير التداخل القسري  $\delta R_2$

وفي المثال الثاني تم أخذ المحيط ( $L_1$ ) قطع ناقص [ الشكل (5-h) ] وتم إدخال المعطيات التالية الموافقة :

$$R_1=1cm ; R_2 =2cm ; a=10cm ; b = 5cm ;$$

$$m = +\frac{5}{15} ; A = \frac{10+5}{2}$$

$$\mu_1 = 3.773.10^4 \text{ MPa} ; \chi_1 = 2.008 \quad \text{" نحاس "}$$

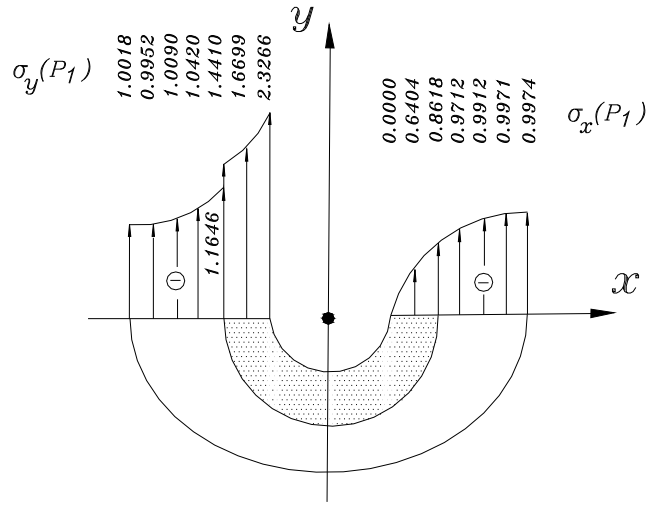
$$\mu_2 = 4.829.10^4 \text{ MPa} ; \chi_2 = 1.969 \quad \text{" برونز "}$$

أما في إدخال قوى الضغط الداخلي ( $P_3$ ) فقد تم إعطاءها قيمة واحدة القوى ، وللتداخل القسري ( $\delta R_2$ ) واحدة الطول ، وتمت معالجة تأثير كل منها بشكل منفرد حسب مبدأ تراكب القوى وذلك بهدف الحصول على وضوح في النتائج .

وبأخذ الحدود الخمسة الأولى ( $N=5$ ) من كل من المجموعات الخطية الثمانية نحصل على (40) معادلة جبرية خطية ، وبحلها تم حساب المعاملات الثابتة وتعيين توابع الإجهادات وقيم الإجهادات في نقاط محددة واقعة على المحور الحقيقي  $ox$  ، ونظمت النتائج ضمن الجدول (2) ، ورسمت مخططات الإجهادات الموافقة ، [ الأشكال (9-8) ] .

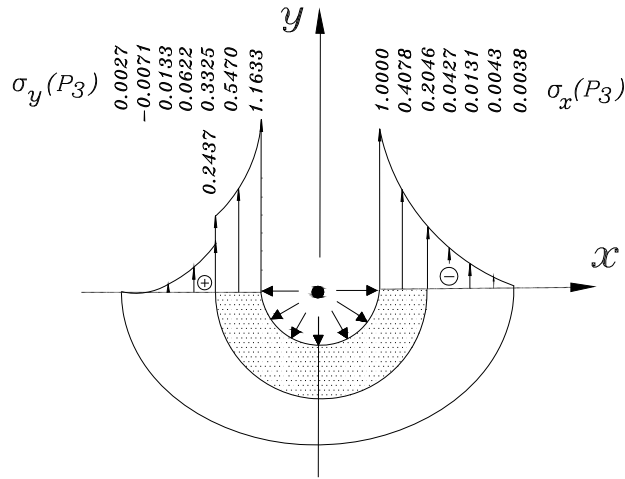
Z	$\sigma_x$		$\sigma_y$	
	$P_3$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$	$P_3$	$\mu_1 \cdot \delta R_2$
$R_1$	-1.0000	-0.0001	+1.1633	-1.3020
$0.5(R_2 + R_1)$	-0.4078	-0.3841	+0.5470	-0.9801
$R_2$	-0.2046	-0.5290	+0.3325	-0.8642
$0.25(a + 3R_2)$	-0.0427	-0.1104	+0.2437	+0.6304
$0.5(a + R_2)$	-0.0131	-0.0338	+0.0622	+0.1610
$0.25(3.a - R_2)$	-0.0043	-0.0112	+0.0133	+0.0344
$a$	-0.0038	-0.0098	-0.0071	-0.0183
			+0.0027	+0.0070

الجدول (2) : يبين قيم الإجهادات ( $\sigma_x ; \sigma_y$ ) بدلالة كل من ( $\mu_1 \cdot \delta R_2 ; P_3$ )



الشكل (8)

مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_y$  و  $\sigma_x$  وفق المحور  $x$  بدلالة  $\mu_1 \cdot \delta R_2$



الشكل (9)

مخطط توزيع الإجهادات  $\sigma_y$  و  $\sigma_x$  وفق المحور  $x$  بدلالة  $P_3$

## النتائج :

يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي:

- - تم استخدام طريقة المتغيرات العقدية بشكل ناجح في حل العديد من مسائل المرونة ذات الحالة الإجهادية المستوية والتي تملك محيطات خارجية مختلفة " مثلث - مربع - مسدس - مثنى - قطع ناقص " تحقق منحني جوردان.
- - باستخدام التمثيل المطابق نستطيع تحويل المحيط  $L_1$  والذي هو عبارة عن قطع ناقص أو مربع أو مثلث أو مسدس أو مثنى واقع في المستوي العقدي  $(Z)$  إلى دائرة الوحدة  $(\gamma)$  الواقعة في المستوي العقدي المساعد  $(\zeta)$  وذلك لنتمكن من استخدام منشور سلسلة لورانت " *Laurent Series* .
- - عدد حدود منشور سلسلة لورانت  $(N)$  يتعلق بدقة الحل المطلوبة ويرتبط بشكل أساسي بالشكل الهندسي للمسألة المدروسة ، ففي المثال التطبيقي الأول وجد أن  $(N=10)$  بينما في المثال الثاني  $(N=5)$  تعطي نتائج ذات دقة متناهية وقريبة جداً من الشروط الحدودية حيث بلغت الدقة 100% ، الشكلين (6-9) ، حيث  $\sigma_x = P_3$  في النقطة  $z = R_1$  .
- - إن الشكل أو المحيط الخارجي للعنصر المدروس يؤثر على دقة النتائج ، ولكن يمكن تجنب هذا الأمر بزيادة  $(N)$  ، حيث تأخذ  $(N)$  قيمة أصغرية للشكل الدائري وقيمة أعظمية للشكل المثلثي ، ويمكن معرفة قيمة  $(N)$  اللازمة للدقة المطلوبة من خلال إعطائها، في البرنامج ، قيمة متزايدة  $(N=1,2,3,\dots)$  والنظر لقيمة  $\sigma_x$  الموافقة لتطبيق  $P_3$  واعتماد قيمة  $(N)$  التي تعطي  $\sigma_x = -1$  في النقطة  $z = R_1$  .
- - لقد تم الحصول على قيم الإجهادات  $(\sigma_x ; \sigma_y)$  بدلالة  $(\mu_1 . \delta R_2 ; P_3)$  وبشكل منفرد آخذين بعين الاعتبار إمكانية استخدام مبدأ تراكم القوى " *Principle of superposition* " وذلك لنتمكن من تحليل النتائج بشكل أفضل.
- - البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة *Visual Basic 6.0* هو برنامج عام نستطيع من خلاله حساب الإجهادات للمسألة المدروسة حسب المحيط الخارجي  $L_1$  وذلك بإدخال قيم مختلفة ل  $(q)$  و  $(N)$  وللخواص الفيزيائية  $(j=1,2)$   $\chi_j$  ,  $\mu_j$  والأبعاد الهندسية  $(R_1 ; R_2 ; a ; b)$  .

## References

- 1 - Amenzade, U.A. Theory of elasticity. High School, Moscow, 1967.
- 2 - Bahteyarof, U.A. .one the torsion of prismatic beam with a doubly connected domain. Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series, no.4, 32 6.1973.
- 3 - Brown, James Ward, Fourier Series and Boundary Value Problems. McGraw-Hill, 2001.
- 4 - Brown, James Ward, Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, 2003.
- 5 - I.S.Sokonikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1956.
- 6 - Lapidus and G.F. Pinder, Numerical Solutions of Partial Differential Equations in Science and Engineering. Wiley. New York, 1982.
- 7 - Markushevich, A.I., the Theory of Analytic Functions. Mir, Moscow, 1983.
- 8 - N.J.Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordoff, Goningen, 1963.
- 9 - Parton, B.Z. and Perlin, P.U. integral equations of the theory elasticity. Nauka, Moscow, 1977.
- 10 - P.K Banerjee and R. Butterfield, Boundary Elements in Engineering Science. McGraw-Hill, New Jersey, 1996.
- 11 - S.Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1970.
- 12 - Savin, G.N. Stress Concentration around Holes. Pergamon Press, London, 1961.
- 13 - Ihssan Tarsha, Numerical method analysis For solution an elasticity problem , Journal of AL-Baath University, Vol.23,2001.
- 14 - Ihssan Tarsha, Stress distribution in a thick –walled cylinder with tow circular holes under torsion moment, Journal of AL-Baath University, Vol.19,2001.
- 15 - Ihssan Tarsha, Torsion of Circular Bar With Tow Longitudinal Circular Hall, Science Week 37 in Damascus, Vol.1,1997.