Numerical method analysis
For solution an elasticity problem

Dr. Eng. IHSSAN TARSHA
CIVIL ENG . AL-BAATH UNIVERCITY

ABSTRACT :

Solution of a problem of elasticity requires the solution of a system of 15 equations with 15 unknowns. A symmetric elimination of some the unknowns has allowed us to reduce the system of equations, either in terms of displacement or in terms of stresses. This suggests various methods that can be used in solving elasticity problems. Some of these methods depend primarily on intuition, while other are based on a systematic application of techniques of applied mathematics. This paper focuses on the numerical method for solution of two-dimensional elasticity problem.

استخدام طريقة التحليل العددي
في حل مسائل نظرية المرونة

د.م إحسان الطرشة
أستاذ مساعد بكلية الهندسة المدنية
في جامعة البعث

ملخص البحث:

إن حل مسألة في نظرية المرونة يحتاج لحل خمس عشرة معادلة تحوي خمسة عشر مجهولاً . وإذا أخذنا بعين الاعتبار تناظر بعض المجاهيل فإن عدد المعادلات اللازمة للحل ينخفض أيضاً و ذلك بغض النظر إن كانت المسألة محلولة بالنسبة للانتقالات أو الإجهادات على حد سواء.

وينتج عن هذا وجود طرق مختلفة يمكن استخدامها في حل مسائل نظرية المرونة .

بعض هذه الطرق يعتمد في الأصل على الحدس أو البديهة بينما الآخر يستند على تطبيق تقنية منظمة للرياضيات التطبيقية .

في هذا البحث نقدم عرضاً للطرق العددية المستخدمة في حل بعض مسائل نظرية المرونة ونركز على طريقة المتغيرات العقدية في حل مسألة انعطاف قضيب أسطواني .

المقدمة :

تعتبر طريقة الفروقات المحدودة (Finite Difference Method) أقدم تكنيك استخدم في حل مسائل نظرية المرونة وبشكل خاص المسائل الحدودية (Boundary Problems) منها.

لقد بدأ باستخدام هذه الطريقة عام 1960 . وهذه الطريقة (FDE) تتضمن بشكل مباشر حلاً تقريبياً للمعادلات التفاضلية الناظمة أو الأساسية (Governing Differential Equations) للمسألة، وذلك من خلال تقسيم الوسط أو المجال (Domain) المدروس إلى مجموعة مترابطة من النقاط المميزة الموزعة داخل الوسط وعلى محيطه وخارجه وتدعى بالعقد (Nodes) . هذه العقد هي نقاط ارتكاز ومراقبة في الحل، وتستخدم في تقنية (FDM) بهدف التمكن من إيجاد جملة من المعادلات الخطية عددها يساوي الى عدد العقد داخل محيط الوسط المدروس والتي بحلها يتم تعيين قيم تابع الإجهادات في تلك النقاط الواقعة داخل المحيط .ومن ثم يتم حساب قيم تابع الإجهادات على محيط الوسط بعد الأخذ بعين الاعتبار الشروط الأولية الخاصة بالمسألة المدروسة والتي على أساسها يتم أيضا تعيين قيم تابع الإجهادات خارج محيط الوسط . ويتم تعيين قيم الإجهادات (ناظمية أو مماسية) بعد إيجاد قيم تابع الإجهادات في مختلف العقد (على المحيط وداخله وخارجه).

إن زيادة عدد العقد يؤدي لزيادة عدد المعادلات الخطية اللازمة لتعيين قيم تابع الإجهادات داخل محيط الوسط وهذا يعني زيادة الدقة في حساب الإجهادات في مختلف العقد.

تجدر الإشارة إلى أن التقنية المستخدمة في هذه الطريقة تمكننا من كشف و تقويم الأخطاء المرتكبة في الحل بشكل سهل وبسيط.

تستخدم (FDM) أيضا في حل مسائل المرونة المستوية والتي محيطها على شكل مربع أو مستطيل ، والتي قد تحتوي على فتحات أو ثقوب كبيرة. لكن استخدامها صعب جداً في المسائل ذات الشكل غير المتناسق (Irregularly shaped) أو التي تحتوي على مناطق شاذة (singularities) ذات صفة مميزة عن بقية المجال وذلك لأن توليد الشبكة (Mesh) الناعمة المطلوبة قرب تلك المنطقة ليس سهلاً من أجل بقية الوسط.

من أجل تفصيل أكثر دقة يمكن العودة لمراجع المعادلات التفاضلية الجزئية وللمرجع[1].

أما الطريقة الثانية فهي طريقة المتغير العقدي (Complex Variable Method) وهي من الطرق الشائعة في حل المسائل الحدودية الأساسية في نظرية المرونة . و أول من استخدم هذه الطريقة الباحث [7] Sherman عام 1940 ، الذي نجح في استنباط تكامل المعادلات اللازمة لحل المسألة الأساسية الأولى والثانية وحتى المسألة المختلطة من مسائل نظرية المرونة الحدودية وبذلك تستحق أعماله كل الاهتمام والتقدير . وقد ارتبط اسم طريقة (CVM) بما يسمى بطريقة معادلة التكامل (Integral Equation Method) والتي استخدمت في حل مسائل نظرية المرونة [11]. و يتضمن المخطط النهجي لهذه الطريقة كخطوة أولى صياغة تحليلية لمسائل نظرية المرونة لتشكيل معادلة التكامل الشاذة (Singular Integral Equation) وكخطوة ثانية استبعاد هذا الشذوذ للحصول على معادلة نظامية غير شاذة (non-Singular Equation) يكمن حلها بطرق أو تقنيات مختلفة وبالتالي الحصول على نتائج ذات دقة كافية .

إن هذا النهج في الحل يؤمن حلاً سهلاً لمسائل نظرية المرونة ولكن في الوقت نفسه يحتاج لعمليات رياضية تحليلية واسعة تختلف من مسألة لأخرى . ولكن بالرغم من ذلك فهذه الطريقة مفيدة لإعطاء حل يكون نقطة استناد ومقارنة لطرق أخرى وذلك لأن النتائج التي نحصل عليها بتطبيق هذه الطريقة تكون ذات دقة مضمونة.

يمكن استخدام هذه الطريقة في حل مسائل نظرية المرونة الخطية (Leariticies Elasticity Problem) والمستوية (two-dimensional problems) أما من أجل المسائل الحجمية (three-dimensional problems) فإن تطبيق هذه الطريقة صعب وذلك لأن اشتقاق معادلات التكامل يكون مضنياً. إن الحل العددي لمعادلات التكامل الخاصة بالمسائل المستوية تمت دراسته بشكل مفصل من قبل (1963) N.I.Muskhelishvili و A.Ya.Gorgidiz و (1991) A.Bahktyarof الذين طبقوا هذه الطريقة على عدد من المسائل وحصلوا على نتائج مذهلة .

وبالعودة لكتاب (1961) Savin المرجع [6] ، يمكن أن نجد حلاً لمسائل فتل وانعطاف مختلفة تم استعراضها ومعالجتها.

لقد تم تطوير طريقة المتغير العقدي من أجل إمكانية تطبيقها في معالجة المسائل المستوية غير المتجانسة الخواص باختلاف الاتجاهات (non-isotopic) وذلك من قبل (1963) Lekhntskii و (1992) Becker و (1995) Zaharrow وغيرهم والتي كانت أعمالهم امتداداً لأعمال (1953) A.N.Stroh في مجال دراسة التشوه المستوي للأجسام الصلبة غير الإيزوتروبية. حيث بتطبيق هذه الطريقة تم إيجاد حلول عامة شاملة للبلاطات المنعطفة غير الإيزوتروبية .

ونشير أيضاً إلى أن طريقة المتغير العقدي تم استخدامها في ميكانيك الانكسار (Fracture Mechanic) من قبل (1980) Basakov و (1990) Pak and Gober و (1994) Ballarini وغيرهم.

و في هذا البحث سنعرض تطبيقاً لطريقة المتغير العقدي في حل مسألة انعطاف قضيب أسطواني.
والطريقة الثالثة في حل مسائل نظرية المرونة الحدودية هي ما يعرف بطريقة معادلة التكامل الحدودي (Boundary Integral Equation Method) أو بطريقة العنصر الحدودي (Boudary Element Method).
إن حدود الوسط أو المجال المدروس يتم وصفها أو تمييزها باستخدام عناصر (Elements) تصل بين نقاط محددة تدعى بالعقد.
و تعتمد هذه الطريقة (BEM) بشكل أساسي على إعادة صياغة أو تشكيل المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations) أو المعادلات التفاضلية الأساسية التي تصف أو تصور تغير المجاهيل (الانتقالات –الإجهادات) (stresses- displacement) داخل الوسط وعلى محيطه أيضا إلى معادلة تكامل حدودي (BIM) مرتبطة فقط بالقيم الحدودية، وحالما يتم تشكيل معادلة التكامل الحدودي هذه يتجه البحث إلى الحلول العددية لهذه المعادلة [4].
إن اشتقاق معادلة التكامل الحدودي يرجع للباحث Fredholm 1905 ، وقد طبقت في دراسة نظرية المرونة (Elasticity Theory) و النظرية الكمونية (Potential Theory) .
فمن أجل مسائل المرونة المستوية الخطية فإن صياغة أو تشكيل (BIE) يعتمد بشكل أساسي على نظرية Betti في العمل المتبادل (Reciprocal Work) ، ويمكن كتابة معادلة التكامل في حالة الانتقال الحدودي (Displacement Boundary) بالشكل التالي :

$$C_{ij}\, u_i + \int_{\Gamma} T_{ij}\, u_i\, d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}\, t_i\, d\Gamma$$

u_i – تابع الانتقالات (displacement function)على محيط الوسط أو المجال (domain).
t_i – تابع القوى المؤثرة على واحدة المساحة (traction function) الواقعة على محيط الوسط.
C_{ij} –تابع مميز (characteristic function) قيمته تساوي (0.5) عندما يكون محيط الوسط أملساً (Smooth boundary).
U_{ij} و T_{ij} – تابعان يدعيان بحلي Kelven الأساسيين .
Γ – المنحني المحيط بالوسط أو المجال المدروس .
إن تشكيل أو صياغة (Formulation) العنصر الحدودي يمكن تصنيفه إلى نوعين وذلك اعتماداً على الطريقة المستخدمة في حل معادلة التكامل الحدودي (BIE) . ففي النوع الأول و الذي يدعى بالطريقة المباشرة (Direct Approach) ، تكون التوابع المجهولة التي تظهر في معادلة(BIE) هي المتغيرات الفيزيائية الفعلية للمسألة (الإجهادات – الانتقالات) .
أما النوع الثاني فيعتمد بشكل أساسي على مجموعة من معادلات التكامل والتي هي مجموعة الحلول الشاذة (Unit Singular Solutions) للمعادلات التفاضلية الأصلية (Original Differential Equations) موزعة بكثافات مميزة مجهولة على محيط الوسط أو المجال المدروس.
إن توابع الكثافة هذه (Density Functions) لا تحمل أي معنى فيزيائي واضح ، لكن حالما يتم تعيينها فإن قيم الإجهادات و الانتقالات في أي نقطة داخل الوسط يمكن حسابها بعملية تكامل بسيطة.
للمزيد من التفاصيل يمكن العودة للمرجع [5].
إن بعض محاسن (BEM) مقارنة مع بقية الطرق العددية يمكن تلخيصها كالتالي:

1 – في معظم التطبيقات يتم اختصار بعد واحد من أبعاد المسألة المدروسة مما يؤدي إلى اختزال في معطيات الإدخال وتخفيض عدد المعادلات الجبرية الناتجة وبالتالي اختصار الوقت الذي يستخدمه الحاسب في معالجة المسألة.

2 – هي طريقة فعالة من أجل الوسط أو المجال غير المنتهي (Infinite Domain) والذي يمكن أن نواجهه مثلاً في ميكانيك التربة (Soil Mechanics) أو ميكانيك السوائل (Fluid Mechanics) وغيرها.

3 – إن استخدام (BEM) يؤدي إلى الحصول على حل مستمر (Continuous Solution) غير مقيد بنقاط معينة داخل المجال المدروس وذلك من خلال معرفتنا للقيم الحدودية (Boundary Values) للمسألة المدروسة .

4 – يمكن حل المسائل السطحية (Surface Problems) مثل ميكانيك الانكسار المرن (Elastic Fracture Mechanics) وميكانيك الانكسار المرن– اللدن (Elastoplastic Fractural Mechanics) أو المسائل التلامسية (Contact Problems) بشكل مرضي جداً واقتصادي .

5 – إن الحل المستخدم في (BEM) يعتمد بشكل أساسي على الحل التحليلي للمعادلات التفاضلية الأساسية أو الناظمة، و نتيجة لذلك تكون الحلول الناتجة ذات دقة جيدة مقارنة مع طريقة العنصر المحدود (FEM) .

وأما الطريقة العددية الأوسع انتشاراً و استخداماً فهي طريقة العنصر المحدود (FEM) والتي تستند صياغتها على أسس وبيانات رياضية وفيزيائية واسعة ومتنوعة. و كان أول من استخدمها العلماء Marin , Topp , Clough , Turne عام 1956 ، فقد قاموا بتمثيل الوسط المستمر ذو البعدين بوساطة إطارات مثلثية و استخدمت آنذاك في مجال الصناعة الجوية لتحليل هياكل الطائرات و الصواريخ، و بعد ذلك أدخل العالمين Kelsey , Arghyris مفهوم الطاقة في تحليل المنشآت مما ساهم في إعادة صياغة طريقة(FEM).

فمن أجل مسائل المرونة الخطية يستخدم مبدأ العمل الافتراضي (Virtual Work) والذي يعطى بالشكل التالي:

$$\iiint_V (\sigma_{ij}\delta e_{ij})\,dV = \iint_S (\sigma_{ij}\, n_j\, \delta u_i)\,dS$$

حيث أن:

σ_{ij} – مصفوفة الإجهاد (stress matrix) .

δe_{ij} – مصفوفة التشوه الافتراضي (virtual strain matrix) الناتج عن الانتقالات الافتراضية δu_i .

n_j – التجيبات الموجهة (direction cosines) للناظم على السطح المطبق عليه الإجهاد (stress) .

يجري توصيف الوسط المدروس بمجموعة من الأوساط الجزئية والتي يجب أن تحيط بكامل الوسط المدروس وأن تكون متناظرة نسبياً وتدعى بالعناصر (elements) .

هذه العناصر تتصل مع بعضها البعض في نقاط مميزة تدعى كذلك بالعقد وإن حقل المتغيرات الأساسي المجهول هو عبارة عن القيم في تلك العقد. إن صياغة المسألة بهذا الشكل ينتج عنه أيضاً مجموعة من المعادلات الجبرية حدودها هي متغيرات العقد (nodal variables) وتعتمد دقة حل هذه المعادلات على تابع الانتقال المفروض ونوع العنصر المحدود وعلى كثافة الشبكة.

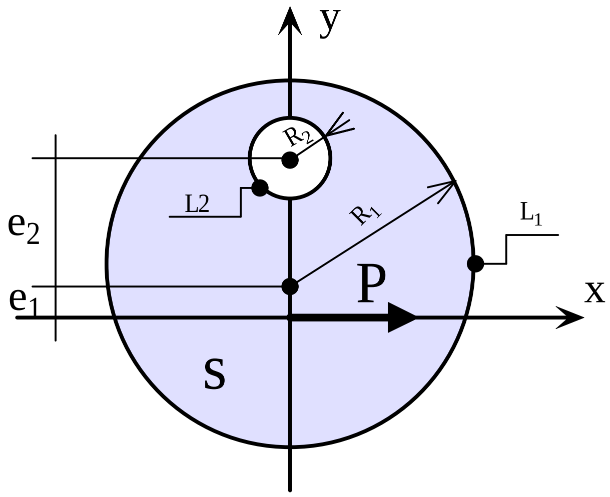
لابد من الإشارة هنا إلى بعض مزايا طريقة (FEM) :

- إن مجموعة المعادلات الناتجة تكون متناظرة وذات مصفوفة محددة العرض (band) نسبياً وذلك لمعظم المسائل .
- يمكن استخدامها في حل المسائل غير المتجانسة الخواص باختلاف الاتجاهات (غير إيزوتروبية) .

إلا أنها لا تعطي نتائج مرضية في مسائل الاهتزاز (vibration) ومسائل الاستقرار (stability) .
للمزيد من التفصيل يمكن العودة للمرجع[12].

3 – دراسة مسألة انعطاف قضيب أسطواني:

بفرض أن المقطع العرضي للقضيب الأسطواني محاط من الخارج بمحيط الدائرة L_1 و التي نصف قطرها R_1 و من الداخل بمحيط الدائرة L_2 و التي نصف قطرها R_2 و المتوضعة لا مركزياً مع L_1 .
نختار مركز ثقل المقطع العرضي كمبدأ لجملة المحاور الإحداثية ox, oy كما في الشكل (1).



الشكل (1)

إن مركز ثقل المقطع العرضي للقضيب المدروس يعطى بالعلاقة :

$$e_1 = \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}\, e_2$$

و بفرض أن القوة العرضية P مطبقة في مركز ثقل المقطع و متجهة باتجاه المحور ox .
كما هو معلوم بأن تحديد الإجهادات المماسية في الانعطاف العرضي يتم عن طريق تعيين تابع $F(z)$ تحليلي في الساحة أو الوسط ثنائي الترابط (S) " أحادي الفجوة " و يحقق الشروط الحدودية التالية [3]:

أ – على المحيط L_1 : (1) $F(t) + \overline{F(t)} = 2.f_1(t) + C_1$

ب – على المحيط L_2 : (2) $F(t) + \overline{F(t)} = 2.f_2(t) + C_2$

حيث أن :

$t, \bar{t}$ – دليل و مرافق دليل النقاط على المحيط $L_j (j = 1,2)$.

$C_j (1,2)$ – ثوابت مجهولة يمكن افتراض أحدها اختيارياً أما الثابت الآخر فيجري تحديده نتيجة حل المسألة .

$f_j(t) (j = 1,2)$ – هما تابعان مجهولان يجري تعيينهما على المحيطين L_1, L_2 وفق العلاقة التالية [3] :

$$f_j(t) = -\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{y^3}{3} - \frac{\mu}{2}x^2.y + 2.(1+\mu)\int_{L_j} x.y.dx + const \; ; \qquad (j=1,2) \qquad (3)$$

حيث أن :

μ – معامل بواسون .

و أن الإحداثيتين الديكارتيين x, y على المحيطين L_1, L_2 يعطيان بالعلاقتين :

$$x = \frac{t+\bar{t}}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{t-\bar{t}}{2.i}$$

التابع الكموني التحليلي $F(z)$ في المجال (S) يمكن افتراضه على شكل سلسلة قوى " سلسلة لوران – Laurant – " وفق الشكل التالي :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z-i.e_1}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R_2}{z-i.e_3}\right)^k \qquad (4)$$

حيث أن :

$e_3 = e_2 + e_1$

$z = x + i.y$ – إحداثيات نقطة في المجال المدروس .

a_k, b_k – بشكل عام هي عبارة عن ثوابت عقدية مجهولة و تسمى بالمعاملات الثابتة لسلسلة القوى و يمكن تحديدها من الشروط الحدودية للتابع الكموني $F(z)$ على المحيطين L_1, L_2 .

و من أجل تحديد تلك الثوابت سنجري تشكيل التابع $F(z)$ على المحيط L_1 بشكل سلسلة قوى المعاملات المتغيرة فيها $\left(\frac{t-i.e}{R_1}\right)$.

إن الحد الأول من العلاقة (4) لا نجري عليه أي تعديل ، و لكن الحد الثاني سيأخذ الشكل التالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R_2}{t-e_3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_1}{t-i.e_3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^k . \left(\frac{t-i.e_3}{t-i.e_1}\right)^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^k . \left(1-\frac{i.e_3+i.e_1}{t-i.e_1}\right)^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k . \left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^k . \left(1-\frac{i.e_2}{t-i.e_1}\right)^{-k}$$

و بما أنه على L_1 لدينا $\left|\frac{i.e_2}{t-i.e_1}\right| < 1$ فإن :

$$\left(1-\frac{i.e_2}{t-i.e_1}\right)^{-k} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}.\,C_{-k}^{\nu}.\left(\frac{i.e_2}{t-i.e_1}\right)^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}.\,C_{-k}^{\nu}.\left(\frac{i.e_2}{R_1}\right)^{\nu}.\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^{\nu}$$

و بالتالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{R_2}{t-e_3}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k}.b_k.\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}.C_{-k}^{\nu}.\left(\frac{i.e_2}{R_1}\right)^{\nu}.\left(\frac{R_1}{t-i.e_2}\right)^{\nu+k}$$

و بفرض أن :

$$k+\nu=n \qquad \Rightarrow \qquad \nu=n-k$$

و عندما : $\nu=0 \Rightarrow n_{\min}=k$

و عندما : $\nu=\infty \Rightarrow n_{\max}=\infty$

و بالتالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{R_2}{t-e_3}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k}.\,b_k\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n-k}.\,C_{-k}^{n-k}.\left(\frac{i.e_2}{R_1}\right)^{n-k}.\left(\frac{R_1}{t-i.e_2}\right)^{n}$$

عندئذٍ فإن التابع الكموني $F(z)$ على المحيط L_1 سيأخذ الشكل التالي :

$$F(t)=a_0+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^{k}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k.\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k}.\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n-k}.\,C_{-k}^{n-k}.\left(\frac{i.e_3}{R}\right)^{n-k}\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^{n} \quad (5)$$

و بالأخذ بعين الاعتبار أن [9]:

$$(-1)^{n-k}.\,C_{-k}^{n-k}=C_{n-1}^{n-k}$$

و المطابقة [9]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}---\sum_{n=k}^{\infty}---=\sum_{n=1}^{\infty}---\sum_{k=1}^{n}$$

نجد :

$$F(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n.\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^{n} \qquad (6)$$

حيث :

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{n-k}.\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{k}.\left(\frac{i.e_3}{R_1}\right)^{n-k}.\,b_k$$

و بالتالي فإن $\overline{F(Z)}$ على المحيط L_1 يعطى بالعلاقة :

$$\overline{F(t)}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n.\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^{n} \qquad (7)$$

و نجري الآن التشكيل التالي للتابع $F(Z)$ على المحيط L_2 حيث أن الحد الثاني لا يتغير أما الحد الأول فيجري تشكيله على شكل سلسلة قوى معاملاتها المتغيرة من الشكل $\left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{t-i.e_1}{R_2}\right)^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \left(\frac{i.e_3-i.e_1}{R_2}\right)^k \cdot \left(1+\frac{t-i.e_3}{i.e_3-i.e_1}\right)^k$$

و باعتبار أن : $i.e_3 - i.e_1 = i.e_2$

وأن :

$$\left(1+\frac{t-i.e_3}{i.e_2}\right)^k = \sum_{n=0}^{k} C_k^n \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{i.e_3}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{k} C_k^n \cdot \left(\frac{R_2}{i.e_3}\right)^n \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^n$$

و بالتعويض يصبح الحد الأول كالتالي :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \sum_{n=0}^{k} C_k^n \cdot \left(\frac{i.e_3}{R_2}\right)^k \cdot \left(\frac{R_2}{i.e_3}\right)^n \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot \sum_{n=0}^{k} C_k^n \cdot \left(\frac{i.e_3}{R_2}\right)^{k-n} \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^n ;$$

و بالأخذ بعين الاعتبار المطابقة التالية [9] :

$$\sum_{k=0}^{\infty} --- \sum_{n=0}^{k} --- = \sum_{n=0}^{\infty} --- \sum_{k=n}^{\infty} ---$$

فإن التابع $F(Z)$ على المحيط L_2 سيأخذ الشكل التالي:

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)^n \qquad (8)$$

حيث :

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \cdot C_k^n \cdot \left(\frac{i.e_3}{R_2}\right)^{k-n} \cdot a_k \qquad ; \quad n > 0$$

و بالتالي فإن $\overline{F(z)}$ على المحيط L_2 يعطى بالعلاقة :

$$\overline{F(Z)} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^n \qquad (9)$$

و بعد إنجاز التكامل (3) على L_1, L_2 و اعتبار أن :

$$x = \frac{t+\bar{t}}{2} \qquad ; \quad y = \frac{t-\bar{t}}{2.i}$$
$$(t-i.e_1).\overline{(t-i.e_1)} = R_1^2 \qquad ; \quad (t-i.e_3).\overline{(t-i.e_3)} = R_2^2$$
$$t = (i.e_1 + R_1.e^{i.\theta}) \qquad ; \quad t = (i.e_3 + R_2.e^{i.\theta})$$
$$\bar{t} = (i.e_1 + R_1.e^{-i.\theta}) \qquad ; \quad \bar{t} = (i.e_3 + R_2.e^{-i.\theta})$$

نجد :

$$f_1(t)=E_0^{(1)}+i.E_1^{(1)}.\left[\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)-\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)\right]+E_2^{(1)}.\left[\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^2\right]-$$
$$-i.E_3^{(1)}.\left[\left(\frac{t-i.e_1}{R_1}\right)^3-\left(\frac{R_1}{t-i.e_1}\right)^3\right] \qquad ; \qquad (10)$$

$$f_2(t)=E_0^{(2)}+i.E_1^{(2)}.\left[\left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)-\left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)\right]+E_2^{(2)}.\left[\left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^2+\left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)^2\right]-$$
$$-i.E_3^{(2)}.\left[\left(\frac{t-i.e_3}{R_2}\right)^3-\left(\frac{R_2}{t-i.e_3}\right)^3\right] \qquad ; \qquad (11)$$

حيث :

$$E_0^{(1)}=\frac{\mu-2}{6}e_1^3-\frac{R_1^2.e_1}{2} \qquad ; \qquad E_0^{(2)}=\frac{\mu-2}{6}e_3^3+\frac{R_2^2.e_3}{2}$$
$$E_1^{(1)}=\frac{3+2.\mu}{8}R_1^3+\frac{2-\mu}{4}R_1.e_1^2 \qquad ; \qquad E_1^{(2)}=\frac{3+2.\mu}{8}R_2^3+\frac{2-\mu}{4}R_2.e_3^2$$
$$E_2^{(1)}=\frac{R_1^2.e_1}{2} \qquad ; \qquad E_2^{(2)}=\frac{R_2^2.e_3}{2}$$
$$E_3^{(1)}=\frac{R_1^3}{8} \qquad ; \qquad E_3^{(2)}=\frac{R_2^3}{8}$$

و بتعويض $(6),(7),(10)$ في (1) والمعادلات $(8),(9),(11)$ في (2) و بمقارنة المتحولات ذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على مجموعتين من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية واللازمة لحساب معاملات سلسلة القوى $(n=1,\infty)$ a_n, b_n :

$$a_n+B_n=2.\left[i.E_1^{(1)}.\varepsilon_1^{(n)}+E_2^{(1)}.\varepsilon_2^{(n)}+i.E_3^{(1)}.\varepsilon_3^{(n)}\right] \qquad (12)$$
$$A_n+b_n=2.\left[i.E_1^{(2)}.\varepsilon_1^{(n)}+E_2^{(2)}.\varepsilon_2^{(n)}+i.E_3^{(2)}.\varepsilon_3^{(n)}\right] \qquad (13)$$

حيث أن :

$$\varepsilon_1^{(n)}=\begin{cases}1 & if \;\; n=1\\ 0 & if \;\; n\neq 1\end{cases} \quad ; \quad \varepsilon_2^{(n)}=\begin{cases}1 & if \;\; n=2\\ 0 & if \;\; n\neq 2\end{cases} \quad ; \quad \varepsilon_3^{(n)}=\begin{cases}1 & if \;\; n=3\\ 0 & if \;\; n\neq 3\end{cases}$$

أو نكتبها بالشكل الرمزي التالي :
$$\varepsilon_k^{(n)}=\begin{cases}1 & if \;\; k=n\\ 0 & if \;\; k\neq n\end{cases}$$

واستناداً للأساس النظري لنظرية المرونة بشأن وجود حل ذي مدلول واحد لمسائل نظرية المرونة المستوية، نستطيع القول بأن لمجموعة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية (12) و (13) حل وحيد و محدد [1].

و الحد الثابت C_1 يعطى بالعلاقة :

$$C_1=2.a_0-2.E_0^{(1)} \qquad (14)$$

و بفرض أن :

$C_1=-2.E_0^{(1)}$ – وهي قيمة الثابت الاختياري الذي جرى افتراضه .

و بالتالي بعد التعويض في (14) نجد أن قيمة المعامل الثابت : $a_0 = 0$

أما الحد الثابت C_2 فيعطى بالعلاقة :

$$C_2 = 2.A_0 - 2.E_0^{(2)}$$

وبالتعويض نجد :

$$C_2 = 2.\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i.\,e_3}{R_2}\right)^k .\, a_k - \frac{\mu-2}{3}e_3^3 - R_2^2 .e_3 \qquad (15)$$

و بأخذ المعادلات الخطية الخمسة الأولى $(n=5)$ من كل مجموعة من المجموعتين الجبريتين الخطيتين $(12),(13)$، يكون عدد المعادلات الخطية الناتجة $(5\times 2 = 10)$ ، و بالحل المشترك لتلك المعادلات بعد التعويض فيها بالأبعاد الهندسية النسبية (R_1 , R_2 , e_2) و بمعامل بواسون μ و بقيمة القوة P يتم حساب معاملات سلسلة القوى $a_n , b_n \; (n = 1,5)$. و بهذا يتعين لدينا التابع العقدي $F(z)$ في الساحة (S) .

أما الإجهادات المماسية فتعطى بالعلاقة [10]:

$$\tau_{xz} - i.\tau_{yz} = -\frac{P}{2.(1+\mu).I_{yy}}\left\{ i.F'(z) + \frac{1}{4}\left[(1+2.\mu).\bar{z}^{2} - \left(3.z^2 - 2.z.\bar{z}\right)\right]\right\} \qquad (16)$$

حيث :

I_{yy} – عزم عطالة المقطع العرضي حول المحور oy .

$\bar{z}$ – نظير النقطة $z(x,y) = x + i.y$ المطلوب حساب الإجهادات فيها .

$F'(z)$ – مشتق التابع الكموني $F(z)$ الذي حصلنا عليه .

و كما هو معلوم فإن أكبر الإجهادات المماسية تظهر في النقاط الواقعة على المحور المحايد و الذي في مسألتنا هو المحور (oy)، و بالتالي عندئذٍ $\tau_{yz} = 0$ [13].

و بالتعويض في العلاقة (4) كل z بـ iy نجد :

$$F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \left(\frac{iy - ie_1}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k . \left(\frac{R_2}{iy - ie_3}\right)^k$$

$$F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k .(i)^k . \left(\frac{y - e_1}{R_1}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k .(-1)^k .(i)^k . \left(\frac{R_2}{y - e_3}\right)^k$$

$$F'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k.(i)^k . \left(\frac{a_k}{R_1}\right) . \left(\frac{y - e_1}{R_1}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k.(i)^k .(-1)^k . \left(\frac{b_k}{R_2}\right) . \left(\frac{R_2}{y - e_3}\right)^{k+1}$$

$$F'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k.(i)^k \left\{ \left(\frac{a_k}{R_1}\right) . \left(\frac{y - e_1}{R_1}\right)^{k-1} - (-1)^k . \left(\frac{b_k}{R_2}\right) . \left(\frac{R_2}{y - e_3}\right)^{k+1} \right\}$$

و بالتالي :

$$iF'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k.(i)^{k+1} \left\{ \left(\frac{a_k}{R_1}\right) . \left(\frac{y - e_1}{R_1}\right)^{k-1} - (-1)^k . \left(\frac{b_k}{R_2}\right) . \left(\frac{R_2}{y - e_3}\right)^{k+1} \right\} \qquad (17)$$

و بتعويض (17) في (16) آخذين بعين الاعتبار أن :

$$\bar{z} = -iy \qquad ; \qquad z = iy$$

نجد :

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2.(1+\mu).I_{yy}}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k.(i)^{k+1}\left\{\left(\frac{a_k}{R_1}\right).\left(\frac{y-e_1}{R_1}\right)^{k-1} - (-1)^k.\left(\frac{b_k}{R_2}\right).\left(\frac{R_2}{y-e_3}\right)^{k+1}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{y^2}{2}(2-\mu)\right]; \qquad (18)$$

حيث : $I_{yy} = \frac{\pi}{4}(R_1^4 - R_2^4)$

الجزء العملي و المناقشة :

للحصول على نتائج عددية للمسألة المدروسة تم وضع برنامج عام بلغة (C^+) يسمح بحلها بمعطيات هندسية (R_1, R_2, e_2) و فيزيائية (μ) مختلفة .

و لقد تم إدخال المعطيات الهندسية (R_2, e_2) بدلالة R_2 حيث :

$$(R_2 = 0.3R_1 \quad ; \quad e_2 = 0.6R_2)$$

و تم إعطاء معامل بواسون القيمة التالية : $(\mu = 0.25)$.

و بتعويض هذه المعطيات في جملة المعادلتين الجبريتين (12,13) و أخذ الحدود الخمس الأولى من كل منهما $(5 \times 2 = 10)$ و بعد الحل المشترك لتلك المعادلات العشر تم الحصول على معاملات سلسلة القوى المرتبة بالجدول (1) :

الجدول (1) :

n	1	2	3	4	5
a_n / R_1^3	$0.94655.i$	0.00853	$-0.26328.i$	0.02510	$0.00059.i$
b_n / R_1^3	$0.22928.i$	0.10599	$0.00121.i$	-0.00022	0

أما الإجهادات المماسية فقد تم حسابها بدلالة $\left(\frac{I_{yy}}{P.R^2}\right)$ و ذلك في نقاط محددة $(z = i\,y)$ ، واقعة على المحور oy بعد تطبيق العلاقة (18) المذكورة في العرض النظري [14].

و لكي نتمكن من مقارنة نتائج هذه المسألة والمحلولة بالبرنامج السابق (C^+) مع نتائج نفس المسألة لكن محلولة ببرنامج (Ansyes) موجود في جامعة (C.W.R.U) ، يستخدم طريقة العناصر المحدودة في الحل ، فقد تم إعطاء المتغيرات R_1, μ, P القيم التالية :

$$R_1 = 10\,cm \quad ; \quad \mu = 0.25 \quad ; \quad P = 5t$$

و هذا يعني أن :

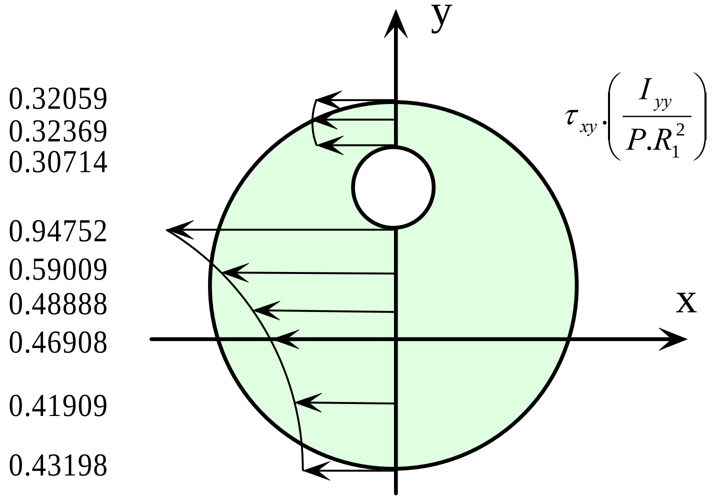
$$R_2 = 3\,cm \quad ; \quad e_2 = 6\,cm$$

و للتوضيح نظمت قيم الإجهادات المماسية التي تم الحصول عليها من تطبيق البرنامجين ضمن الجدول (2) ، و رسم مخطط توزعها ، [الشكلين (3 - 2)].

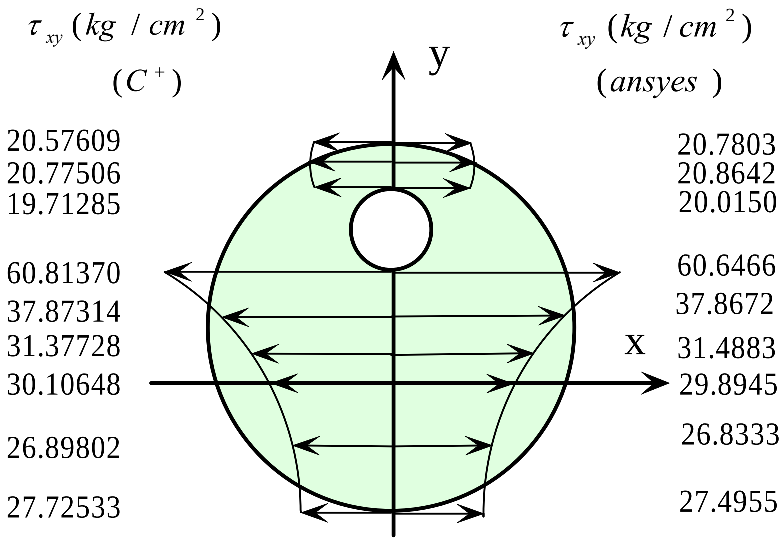
الجدول (2) :

z	$\tau_{xy}.\left(\frac{I_{yy}}{P.R_1^2}\right)$	τ_{xy} (C^+)	τ_{xy} $(ansyes)$
$i(R_1 + e_1)$	0.32059	20.57609	20.7803

$i.(R_1+R_2+e_2+2.e)/2$	0.32369	20.77506	20.8642
$i(e_3+R_2)$	0.30714	19.71285	20.0150
$i(e_3-R_2)$	0.94752	60.81370	60.6466
$i(e_3-R_2)/2$	0.59009	37.87314	37.8672
$i.e_1$	0.48888	31.37728	31.4883
0	0.46908	30.10648	29.8945
$-i.(R_1-e_1)/2$	0.41909	26.89802	26.8333
$-i.(R_1-e_1)$	0.43198	27.72533	27.4955



الشكل(2)



الشكل (3)

النتائـــج :

يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي :

1 – إن اختيار طريقة حل مسائل نظرية المرونة يتعلق نوع المسألة المدروسة إن كانت خطية أو مستوية أو حجمية ، وتعتبر طريقة المتغير العقدي وسيلة فعالة لحل مسائل عديدة من مسائل نظرية المرونة، وقد استخدمت في هذا البحث في حل إحدى المسائل التطبيقية البسيطة ، وأدت الى إيجاد تقنية حسابية لتعيين الإجهادات المماسية في قضيب أسطواني يحوي فجوة أسطوانية و يتعرض لتأثير قوة عرضية .

2 – إن عدد المعادلات (N) المأخوذ من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية (12 , 13) يتعلق بدقة الحل المطلوبة وقد تبين أن (N = 5) يعطي نتائج ذات دقة مقبولة .

إن استخدام الأبعاد الهندسية (e_2 , R_2) كنسبة من (R_1) مبرر وذلك ليتسنى لنا حل عدة مسائل وبمعطيات هندسية مختلفة، كما أن البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة (C^+) هو برنامج عام نستطيع من خلاله حل المعادلات الناتجة عن تحديد قيمة اختيارية لـ (N) ، وبالتالي تعيين قيم المعاملات الثابتة لسلسلة القوى ، ومن ثم حساب قيم الإجهادات في نقاط محددة بأبعاد هندسية نسبية تتغير بتغير الأبعاد الهندسية للمسألة المدروسة .

3 – إن قيم الإجهادات المماسية المحسوبة وفقاً لطريقة المتغير العقدي أدق من تلك المحسوبة وفق برنامج العناصر المحدودة و ذلك لأن شبكة العناصر المحدودة المولدة ذاتياً ليست ناعمة بالقدر الذي يعطي الدقة المطلوبة .

4 – إن قيم الإجهادات التي تم الحصول عليها نظمت ضمن جداول ومخططات ليسهل استخدامها .

References

1- S.Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1970.
2- I.S.Sokonikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1956.
3- N.J.Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordoff, Goningen, 1963.
4- L. Lapidus and G.F. Pinder, Numerical Solutions of Partial Differential Equations in Science and Engineering. Wiley. New York, 1982.
5- P.K Banerjee and R. Butterfild, Boundary Elements in Engineering Science. McGraw-Hill, New Jersey, 1996.
6- Savin, G.N. Stress Concentration around Holes. Pergamon Press, London, 1961.
7- Sherman, D.I. on a method of solution of static problem of stresses in plane multiply connected regions, Sciences RSS 1934 pp.376-414.
8- Ballarini, R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface. Eng. Fract. Mcha.37, 1-5.1998.
9- Amenzade, U.A. Theory of elasticity. High School, Moscow, 271p.1967.
10-Bahteyarof, U.A .one the torsion of prismatic beam with a doubly connected domain. Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series, no.4, 32-36.1972.
11-Parton, B.Z. and Perlin, P.U. integral equations of the theory elasticity. Nauka, Moscow, 331p. 1977.
12- Bathe, K. j. Finite element procedure in engineering analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.
13- Ihssan Tarsha, Torsion of Circular Bar With Tow Longitudinal Circular Hall, Science Week 37 in Damascus, Vol.1,1997.
14- Ihssan Tarsha, Using The Complex Functions to Compute the Stresses in a Plate Interconnected by Force, Journal of Bassel AL–Assed for Engineering Sciences, Vol.1,1997.
15- Ihssan Tarsha and Soha Wahby, Torsion of Bar Consists of Three Different Material Pipes, Journal of AL-Baath University, Vol.20,1998.