

Concentration and Distribution Stress In a Square Plate Containing a Hole

Dr. Eng. IHSSAN TARSHA
CIVIL ENG.
ALBAATH UNIVERSITY

Abstract

This paper is presented the solution for concentration and distribution stress in an square plate containing a concentric circular hole, the plate is subjected to external uniform tensile stress of intensity P in the x and y directions.

Solution of this elasticity stress problem can be obtained by three different methods :

- 1- Complex variable method and conformal mapping .
- 2- Airy's stress function assumed as polynomials in polar coordinates method .
- 3- Numerical methods by finite elements method by a structural analysis program " ANSYS " .

Then comparing the resultant and finding suitable finite element for researched problem .

Keywords : Complex Variables , Conformal Mapping , finite element , Kirsch problem .

تركيز وتوزيع الإجهادات في صفيحة مربعة تحوي فجوة

د.م إحسان الطرشة
أستاذ بكلية الهندسة المدنية
في جامعة البعث

ملخص البحث :

يتعرض هذا البحث لحساب توزع وتركيز الإجهادات في صفيحة مربعة الشكل مفرغة بشكل دائري في مركزها ومعرضة لقوى شادة منتظمة P باتجاه المحورين x و y ، وذلك باستخدام الطرق الثلاث التالية :

- 1- طريقة المتغيرات العقدية مع إدخال التمثيل المطابق .
 - 2- البحث عن تابع Airy's للإجهادات في جملة إحداثية قطبية .
 - 3- الطريقة العددية باستخدام طريقة العناصر المحدودة بمساعدة برنامج التحليل الإنشائي " ANSYS " .
- ومن ثم مقارنة النتائج واختيار العنصر المحدود المناسب للمسألة .
- الكلمات المفتاحية : متغيرات عقدية ، تمثيل مطابق ، عنصر محدود ، مسألة كيرتس .

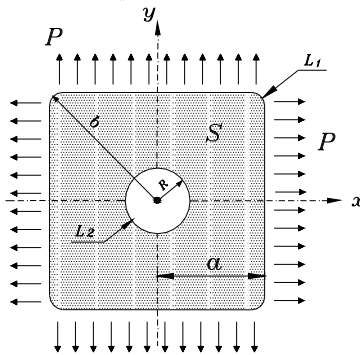
هدف البحث وطرقه :

في هذا البحث سوف نعالج مسألة تركيز وتوزع الإجهادات في صفيحة مربعة طول ضلعها $2a$ ، مفرغة في وسطها بدائرة نصف قطرها R ، وتخضع لإجهادات شادة P متساوية ومنتظمة على طول أضلاعها الأربعة ، والمبينة في الشكل (1) . وذلك باستخدام ثلاث طرق مختلفة بهدف مقارنة نتائجها والوقوف على ميزاتها واختيار العنصر المحدود الذي يعطي أفضل دقة ممكنة .

1- حل المسألة بطريقة التوابع العقدية :

إن استخدام طريقة المتغيرات العقدية " Complex Variables " من قبل الباحثين [3] Muskhelishvili و Kolosoff ، ساعد في حل العديد من مسائل المرونة وذلك باستخدام بعض تكاملات المعادلات التفاضلية الشادة مما ترافق بصعوبات رياضية ، إلى أن قدم الباحثين [6] Amenzade و [7] Bahtayarof طرقاً تحليلية عددية يمكن استخدام الحاسوب فيها ، بعدها لاقت طريقة المتغيرات العقدية انتشاراً واسعاً في حل العديد من المسائل الحدودية المختلفة ، والتي تعد مسألة هذا البحث إحداها .

كما هو معروف من بحوث سابقة فإن محيط الصفيحة المدروسة المبينة في الشكل (1) يفترض أن يكون منحن بسيط مغلق " Simple closed curve " وهو ما يعرف بمنحني جوردان " Jordan curve " ، وهو منحن أملس من أهم خواصه وجود مماس وحيد في كل نقطة على محيط هذا المنحني .



الشكل (1) : الصفيحة المربعة المدروسة

إن توابع الإجهادات هي توابع تحليلية " *analytic functions* " في المجال أو الساحة العقدية S الوحيدة الترابط " *unique connected domain* " والمكونة من مادة واحدة خطية فيزيائياً ، ويتم البحث عنها على شكل سلسلة قوى " منشور سلسلة لورانت - *Laurent series expansions* " معاملاتنا الثابتة تحدد بحل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية والتي يتم الحصول عليها من الشروط الحدودية " *Boundary Conditions* " للمسألة المدروسة .

ولتعيين الإجهادات $(\sigma_x; \sigma_y)$ التي ستنشأ في الصفحة المدروسة يتم البحث عن زوج من التوابع العقدية $\varphi(z), \psi(z)$ التحليلية والمنظمة في الساحة S .
وفق الشكل التالي [3] :

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{z}\right)^k \quad z \in S \quad (1)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^N A_k \left(\frac{z}{A}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{R}{z}\right)^k \quad z \in S \quad (2)$$

حيث :

- $A = \frac{a+b}{2}$.
- $a ; b$: نصف قطر كل من الدائرتين المماسية داخلياً وخارجياً للمحيط الخارجي L_1 .
- N : عدد معين ثابت قيمته تتعلق بدقة الحل المطلوبة ، ولتسهيل التشكيلات الرياضية التي سنجرها سنفرض أن $(N = \infty)$ ، وهذا الفرض ممكن كما سنرى في الحل العددي لأن كل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية التي سنحصل عليها سيتم فتحها بعدد محدد من الحدود تكفي لدقة الحل المطلوبة .
- $(\bar{z} = x - iy ; z(x,y) = x + iy)$: المتغير العقدي ومرافقه في المجال المدروس S الواقع في المستوي العقدي (Z) ، وفقاً لجملة ديكارتية .
- $(k=1 \rightarrow N)$: هي الأمثال الثابتة المجهولة والتي يطلب تحديد قيمها وتسمى بمعاملات سلسلة القوى " منشور سلسلة لورانت " .

إن التوابع العقديّة المفروضة يجب أن تحقق الشروط الحدودية التالية [2] :

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = P(t) + C \text{ on } L_1 \quad (3)$$

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{on } L_2 \quad (4)$$

حيث :

$t ; \bar{t}$ - دليل ومرافق دليل النقاط على المحيط $(j=1 \rightarrow 2)$ في المستوي

العقدي (Z) .

C - ثابت يحدد أثناء حل المسألة ، ويمكن افتراض قيمة محددة له يمكن أن تساوي الصفر .

بما أن المحيط L_1 في المستوي العقدي (Z) ليس دائرياً ، لذلك نستخدم التصوير المطابق " *Conformal mapping* " أو التحويل المطابق " *Conformal transformation* " لتحويله إلى دائرة الوحدة (γ) " وهي دائرة نصف قطرها يساوي الواحد $|\xi|=1$ " الواقعة في المستوي العقدي المساعد (ζ) ويتم ذلك باستخدام التابع التالي [3] :

$$Z = W(\zeta) = A \cdot \left(\zeta + \frac{m}{\zeta^{q-1}} \right) \quad (6)$$

$$m = \frac{1}{(q-1)^2} \quad \text{حيث :}$$

q - عدد محاور التناظر للمحيط L_1 المدروس .

وبالتالي على المحيط L_1 " المربع " تأخذ المعادلة (6) الشكل التالي :

$$t = A \cdot \left(\tau + \frac{m}{\tau^{q-1}} \right) \quad (7)$$

τ - دليل النقاط على محيط دائرة الوحدة (γ) الواقعة في المستوي العقدي (ζ) .

لتعويض القيمة الحدودية للتابع (1) على المحيط L_1 في الشروط الطرفية (3-4) ، نجري عدداً من العمليات الرياضية تمكننا من مقارنة العوامل المتغيرة المتشابهة $(\tau^n ; \tau^{-n})$ وذات الأس المتساوي مع بعضها البعض ، فنجد أن تشكيل الحد الأول من العلاقة (1) مع الأخذ بعين الاعتبار (7) ، يتم وفق التالي :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{A}\right)^k &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau^k \left(1 + \frac{m}{\tau^q}\right)^k \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{v=0}^k C_k^v m^v \cdot \frac{1}{\tau^{qv-k}}\end{aligned}$$

$$C_k^v = \frac{k!}{(k-v)! \cdot v!} \quad \text{حيث :}$$

ويفرض أن : $n = q \cdot v - k$ ، نجد :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{A}\right)^k &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=k}^{k(q-1)} C_k^{\frac{n+k}{q}} \cdot m^{\frac{n+k}{q}} \cdot \frac{1}{\tau^n} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k-qE\left(\frac{k}{q}\right)}^k C_k^{\frac{k-n}{q}} \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \tau^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{n=qE\left(\frac{k}{q}\right)-k+q}^{k(q-1)} C_k^{\frac{k+n}{q}} m^{\frac{k+n}{q}} \tau^{-n}\end{aligned}$$

ولكن [7] :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} (----) \sum_{n=k-q \cdot E\left(\frac{k}{q}\right)}^k (----) &= \sum_{n=1}^{\infty} (----) \sum_{k=n}^{\infty} (----) \\ \sum_{k=1}^{\infty} (----) \sum_{n=q \cdot E\left(\frac{k}{q}\right)-k+q}^{k(q-1)} (----) &= \sum_{n=1}^{\infty} (----) \sum_{k=\frac{n+q \cdot \alpha}{q-1}}^{\infty} (----)\end{aligned} \quad (8)$$

يمكن كتابة الحدين الأخيرين من العلاقة السابقة بالشكل :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{A}\right)^k = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} \quad (9)$$

حيث :

$$H_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^{\frac{k-n}{q}} \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot a_k \quad (10)$$

$$M_n = \sum_{k=\frac{n+q \cdot \alpha}{q-1}}^{\infty} C_k^{\frac{k+n}{q}} \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot a_k \quad (11)$$

• (*) : وهي العلامة الموجودة فوق إشارة الجمع \sum ، وتعني بأن قيم k سوف تتزايد بالقيمة q .

• $E\left(\frac{k}{q}\right)$: تعني بأن قيمة الحد $\left(\frac{k}{q}\right)$ تؤخذ مقربة إلى أكبر عدد صحيح .

• α : أصغر عدد صحيح موجب يمكن تعويضه بحيث يكون $\frac{n+q.\alpha}{q-1}$

أما الحد الثاني : $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{z}\right)^k$ من العلاقة (1) ، فيمكن تشكيله كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^k \cdot \left(\frac{A}{t}\right)^k$$

وبالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (8) ، نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^k \cdot \sum_{v=0}^{\infty} C_{-k}^v \cdot m^v \cdot \frac{1}{\tau^{q.v+k}}$$

حيث : $C_{-k}^v = (-1)^v \cdot C_{k+v-1}^v$

وبفرض : $n = q.v + k$ ، نجد :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} C_{-k}^{n-k} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \tau^{-n}$$

وحيث أن :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (----) \sum_{n=k}^{\infty} (----) = \sum_{n=1}^{\infty} (----) \sum_{k=n-q.E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^n (----)$$

: نجد

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (12)$$

حيث :

$$S_n = \sum_{k=n-q.E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^n C_{-k}^{n-k} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^k \cdot b_k \quad (13)$$

عند تعويض العلاقتين (12,9) في العلاقة (1) ، فإنها تأخذ الشكل التالي :

$$\varphi(t)=\varphi(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \tau^{-n} \quad (14)$$

وبشكل مشابه ننتقل من المتحول t إلى المتحول τ على المحيط L_1 للتتابع $\psi(t) = \psi(\tau)$ ، فنجد :

$$\psi(t)=\psi(\tau) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \tau^{-n}$$

وبالتالي :

$$\overline{\psi(t)} = \overline{\psi(\tau)} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \tau^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \tau^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \tau^n \quad (15)$$

حيث :

$$W_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot A_k \quad (16)$$

$$G_n = \sum_{k=\frac{n+q \cdot \alpha}{q-1}}^{\infty} C_k^q \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot A_k \quad (17)$$

$$F_n = \sum_{k=n-q \cdot E\left(\frac{n-1}{q}\right)}^n C_{-k}^q \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^k \cdot B_k \quad (18)$$

ويمكن كتابة القيمة الحدودية للتابع $t\overline{\varphi_1'(t)}$ على L_1 بعد الأخذ بعين الاعتبار

العلاقة (7) ، وإجراء بعض العمليات البسيطة بالشكل التالي [11] :

$$\begin{aligned} t\overline{\varphi_1'(t)} &= \left[A \cdot \left(\tau + \frac{m}{\tau^{q-1}} \right) \right] \overline{\varphi_1'(\tau)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\delta_n^1 \cdot a_n + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + A \cdot m \cdot D_{n+q-1} - A \cdot m \cdot T_{n+q-1} \right] \cdot \tau^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n + \delta_n^6 \cdot A \cdot m \cdot L_{n-q+1} + \delta_n^4 \cdot A \cdot m \cdot D_{q-n-1} - \delta_n^1 \cdot A \cdot m \cdot T_{q-n-1} \right] \cdot \tau^{-n} + \\ &+ A \cdot L_1 + A \cdot m \cdot D_{q-1} - A \cdot m \cdot T_{q-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

حيث :

$$\delta_n^3 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1 \\ 1 & \text{when } n \neq 1 \end{cases} \quad \delta_n^2 = \begin{cases} 0 & \text{when } n=1,2 \\ 1 & \text{when } n \geq 3 \end{cases} \quad \delta_n^1 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq 1 \\ 1 & \text{when } n=1 \end{cases}$$

$$\delta_n^5 = \begin{cases} 0 & \text{when } n \neq q-1 \\ 1 & \text{when } n = q-1 \end{cases} \quad \delta_n^6 = \begin{cases} 0 & \text{when } n < q \\ 1 & \text{when } n \geq q \end{cases} \quad \delta_n^4 = \begin{cases} 0 & \text{when } n > q-2 \\ 1 & \text{when } n \leq q-2 \end{cases}$$

$$L_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+1}{A} \right) \cdot C_k^{\frac{k-n}{q}} \cdot m^{\frac{k-n}{q}} \cdot a_{k+1} \quad (20)$$

$$D_n = \sum_{k=\frac{n+q \cdot \alpha}{q-1}}^{\infty} \left(\frac{k+1}{A} \right) C_k^{\frac{k+n}{q}} \cdot m^{\frac{k+n}{q}} \cdot a_{k+1} \quad (21)$$

$$T_n = \sum_{k=n-q \cdot E}^n \left(\frac{k-1}{A} \right) \cdot C_{-k}^{\frac{n-k}{q}} \cdot m^{\frac{n-k}{q}} \cdot \left(\frac{R}{A} \right)^{k-1} \cdot b_{k-1} \quad (22)$$

وبتعويض (14, 15, 19) في (3-4) ، وبمقارنة المتحولات أو المتغيرات ذات الأس المتساوي مع بعضها البعض نحصل على أربع مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية :

$$H_n + \delta_n^1 \cdot a_n + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + m \cdot A \cdot D_{n+q-1} - m \cdot A \cdot T_{n+q-1} + G_n + F_n = \delta_n^1 \cdot P \cdot A \quad (23)$$

$$M_n + S_n + A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n + \delta_n^6 \cdot m \cdot A \cdot L_{n-q+1} + \delta_n^4 \cdot m \cdot A \cdot D_{q-n-1} - \delta_n^1 \cdot m \cdot A \cdot T_{q-n-1} + W_n = \delta_n^5 \cdot P \cdot A \cdot m \quad (24)$$

$$H_n + \delta_n^1 \cdot a_n + \delta_n^3 \cdot A \cdot D_{n-1} - \delta_n^2 \cdot A \cdot T_{n-1} + m \cdot A \cdot D_{n+q-1} - m \cdot A \cdot T_{n+q-1} + G_n + F_n = 0 \quad (25)$$

$$M_n + S_n + A \cdot L_{n+1} + \delta_n^5 \cdot m \cdot a_n + \delta_n^6 \cdot m \cdot A \cdot L_{n-q+1} + \delta_n^4 \cdot m \cdot A \cdot D_{q-n-1} - \delta_n^1 \cdot m \cdot A \cdot T_{q-n-1} + W_n = 0 \quad (26)$$

وبالتالي نحصل على (4) مجموعات من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية

. (26,25,24,23)

التطبيق العملي :

للحصول على نتائج عددية للمسألة المدروسة تم إعداد برنامج عام بلغة Visual Basic يسمح لنا بإدخال (q) والأبعاد الهندسية ($R ; a$) وقيمة إجهاد الشد P ، وذلك بأخذ أي عدد (N) من الحدود المطلوبة من كل مجموعة من المجموعات الجبرية الخطية الأربعة (26,25,24,23)، وبالتالي الحصول على ($4 \times N$) معادلة جبرية خطية لحساب معاملات سلسلة القوى " الأمثال الثابتة " $a_n, A_n, b_n, B_n, (n=1 \rightarrow N)$ ، والتي بحسابها نستطيع تعيين التوابع العقدية التحليلية $\psi(z), \varphi(z)$ في المجال S ، ومن ثم حساب الإجهادات الناظمية ($\sigma_x ; \sigma_y$) في نقاط محددة (z) واقعة على المحور ox بتطبيق علاقة (G.V.Kolosoff & N.I.Muskhelishvili) [3] [12] [13] [14] التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} = 2 \cdot \text{Re}[\varphi'(z)] \\ \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \sigma_{xy} &= \bar{z} \cdot \varphi''(z) + \psi'(z) \end{aligned} \right\}$$

حيث أن :

Re - يشير إلى الجزء الحقيقي " *Real part* " من التابع الموافق .

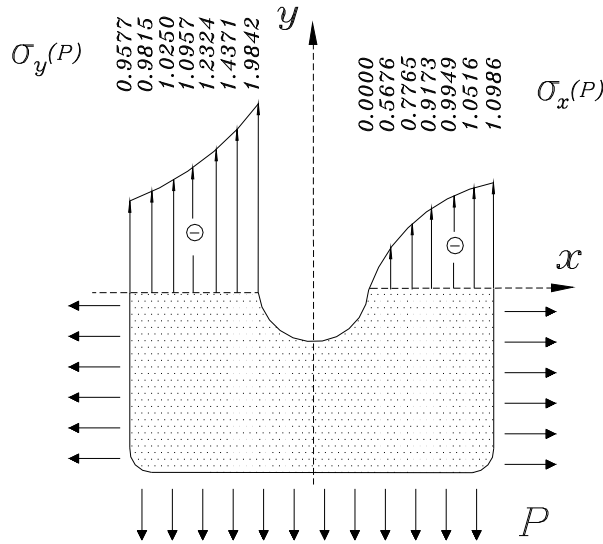
ولقد تم حل مثال عددي ، وفقاً للمعطيات التالية :

$$R = 1 \text{ cm} ; a = 5 \text{ cm} ; q = 4 \Rightarrow m = -\frac{1}{9}$$

وبأخذ الحدود العشرة الأولى ($N = 10$) من كل من المجموعات الخطية الأربعة ، حصلنا على (40) معادلة جبرية خطية تم حلها ، وحساب المعاملات الثابتة وتعيين توابع الإجهادات وقيم الإجهادات ($\sigma_x ; \sigma_y$) في نقاط محددة ، واقعة على المحور الحقيقي ox ، وللتوضيح نظمت تلك القيم بدلالة ($P = 1$) ضمن الجدول (1) ، ورسمت مخططات الإجهادات الموافقة ، [الشكل (2)] .

z	$\sigma_x(P)$			$\sigma_y(P)$		
	الأولى	الثانية	الثالثة	الأولى	الثانية	الثالثة
R	0.0000	0.0000	0.0025	1.9842	2.0000	2.0706
$(0.2a+0.8R)$	0.5676	0.6914	0.7203	1.4371	1.3086	1.3549
$(0.4a+0.6R)$	0.7765	0.8521	0.8950	1.2324	1.1479	1.1874
$(0.5a+0.5R)$	0.9173	0.8888	0.9303	1.0957	1.1111	1.1502
$(0.6a+0.4R)$	0.9949	0.9135	0.9572	1.0250	1.0865	1.1273
$(0.8a+0.2R)$	1.0516	0.9433	0.9890	0.9815	1.0567	1.1097
a	1.0986	0.9600	1.0000	0.9577	1.0400	1.1270

الجدول (1) : يبين قيم الإجهادات (σ_x ; σ_y) بدلالة (P)



الشكل (2) : مخطط توزيع الإجهادات σ_x و σ_y تحت تأثير إجهاد الشد P وفقاً للطريقة العقدية

2- حل المسألة بالبحث عن تابع الإجهادات في جملة إحداثية قطبية :

إن هذه المسألة يمكن حلها باستخدام مبدأ جمع الآثار *Principle of superposition* لحل مسألة مشهورة باسم العالم (G.Kirsch-1898) والتي درست توزيع الإجهادات

بالصفحة المدروسة وتركيزها حول الثقب الدائري وذلك عند تعرضها لإجهادات شادة منتظمة وفق اتجاه واحد " باتجاه المحور ox مثلاً " وعند شروط محددة هي :

- طول الصفحة غير محدود .
- عرض الصفحة أكبر أو يساوي عشر أمثال نصف قطر الثقب الدائري فيها .

ويمكن العودة للمرجع [1] للوقوف على كافة العلاقات بالتفصيل ونخلص إلى أن حل هذه المسألة كان بالبحث عن تابع الإجهادات في جملة إحداثية قطبية ، وبأخذ مبدأ جمع الآثار كانت العلاقات التي تحدد الإجهادات σ_x و σ_y على النقاط الواقعة على المحور ox وتحت تأثير إجهاد الشد P المنتظم على كافة حواف الصفحة والمشابه لمسألتنا المدروسة هي [2] :

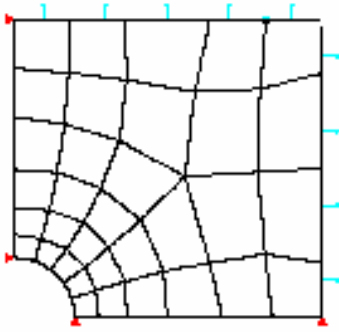
$$\sigma_{xy} = 0 \quad ; \quad \sigma_y = P \cdot \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right) \quad ; \quad \sigma_x = P \cdot \left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right)$$

وبإعطاء قيم محددة لـ $x=1 \rightarrow 7$ هي القيم المدرجة في الجدول (1) تحت العمود z و $R=1cm$ و $a=5cm$ ، تم حساب قيم الإجهادات σ_x و σ_y بدلالة P ، ونظمت أيضاً في الجدول (1) .

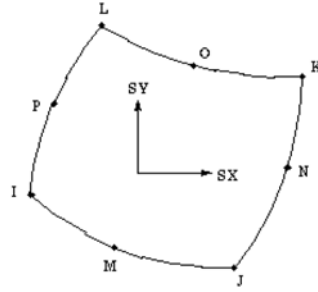
3- حل المسألة بطريقة العناصر المحدودة باستخدام برنامج ANSYS :

إن إمكانيات الحساب الحديثة جعلت استخدام العناصر المحدودة الطريقة الأكثر فعالية وشمولية ، لأنها مؤهلة بشكل جيد جداً للبرمجة على الحاسوب لاعتمادها الصياغة المصفوفية ، ولأنها قابلة للتكيف مع طبيعة المسألة المعدة للدراسة ، فقد أصبحت الآن شائعة في جميع فروع العلوم ومن بينها الهندسية .

يمكن حل بعض المسائل دون استخدام مفهوم العنصر المحدود ، وذلك بالبحث عن توابع إجهادات مستمرة تصف سلوك المنشأ ككل وبمساعدة الحواسيب " كما هو في الطريقتين المعروضتين سابقاً " ، أو أن تحل المعادلات التفاضلية بدلالة توابع تحليلية مستمرة ، ولكن هذه الحلول تكون ممكنة فقط لنوع محدود من المسائل الإنشائية .

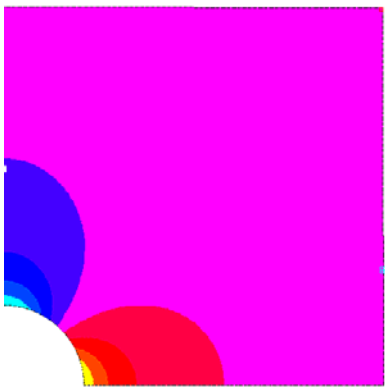


الشكل (4)



الشكل (3)

ومن أجل إيجاد نموذج بالعناصر المحدودة يعطي توزيع الإجهادات في الصفحة المثقوبة بأفضل دقة ممكنة ، وباستخدام برنامج ANSYS وبالإطلاع على مكتبة العناصر المحدودة التي يحويها ودراسة خواصها ، تم اختيار العنصر المحدود PLAE 145 2-D Quadrilateral المبين في الشكل (3) من مكتبة البرنامج ، حيث أن هذا العنصر معرف بثمانية عقد لكل منها درجتان حرة وفق المحورين $x ; y$ ويمكن استخدامه من أجل دراسة الحالة الإجهادية المستوية أو التشوهية المستوية ولمواد موحدة الخواص في كافة الاتجاهات " Isotropic " أو لمواد موحدة الخواص في اتجاهين متعامدين " Orthotropic " . وللتعرف على خواص هذا العنصر بالتفصيل يمكن العودة إلى مكتبة البرنامج [9-10].



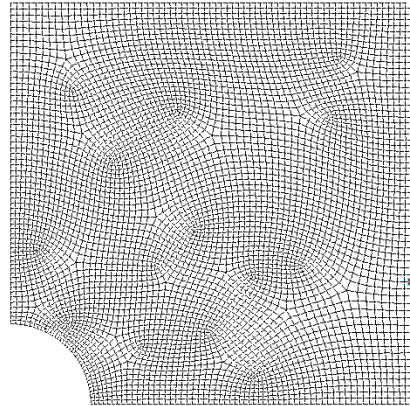
الشكل (6)

```

ANSYS 5.4
OCT 28 2006
18:18:06
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=4
AVRES=Max
DMX =.179E-06
SMN =.001804
SMX =2.071

```

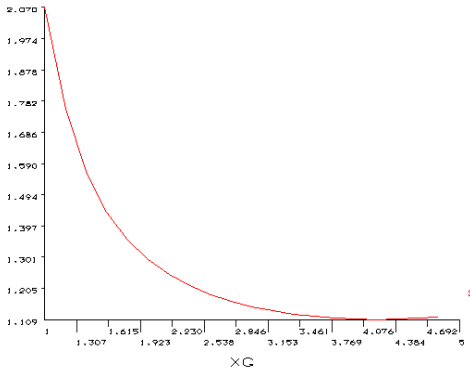
Yellow	.001804
Orange	.231673
Red	.461543
Dark Red	.691413
Magenta	.921283
Blue	1.151
Dark Blue	1.381
Light Blue	1.611
Cyan	1.841
Light Cyan	2.071



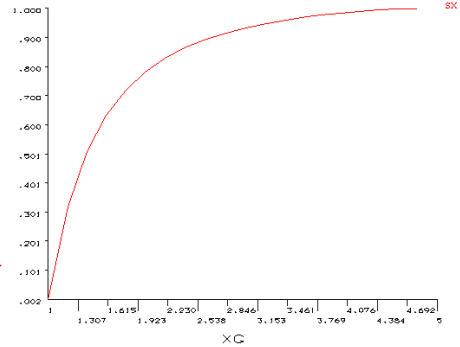
الشكل (5)

ويسبب تناظر الصفيحة المدروسة فقد تم دراسة ربعها ، ومن أجل ذلك تم تقييد درجات الحرية الأفقية في عقد العناصر على طول خط التناظر الشاقولي أعلى الثقب . أما العقد على طول خط التناظر الأفقي يمين الثقب فقد تم تقييد درجات الحرية الشاقولية لها حيث تكون الحركة الأفقية مسموحة [الشكل (4)] .

وبعد إدخال الأبعاد الهندسية والخواص الفيزيائية وكافة المعطيات اللازمة لعمل البرنامج تم الحصول على شدة توزيع الإجهادين ($\sigma_x ; \sigma_y$) في الصفيحة بدلالة (P) ومخططي توزيعهما وفق المحور (ox) الموضحة في الأشكال (6-8) في نقاط معينة مدرجة في الجدول (1) للمقارنة ، وذلك وفقاً لنعومة الشبكة [4561 عنصراً و 17556 عقدة] المبينة بالشكل (5) .



الشكل (8)



الشكل (7)

النتائج :

يمكن تلخيص النتائج الأساسية التي تم الحصول عليها على الشكل التالي :

- 1- يمكن استخدام طريقة المتغيرات العقدية بشكل ناجح في حل العديد من مسائل المرونة ذات الحالة الإجهادية المستوية والتي تملك محيط خارجي يحقق منحني جوردان. وباستخدام التمثيل المطابق نستطيع تحويل ذلك المحيط إلى دائرة الوحدة الواقعة في مستوي عقدي مساعد .

2- إن البرنامج الحاسوبي المكتوب بلغة *Visual Basic 6.0* هو برنامج عام نستطيع من خلاله حساب الإجهادات للمسألة المدروسة وذلك بإدخال قيم مختلفة لـ (q) وللأبعاد الهندسية $(R ; a)$ ، ولعدد حدود منشور سلسلة لورانت (N) الذي يتعلق بدقة الحل المطلوبة ويرتبط بشكل أساسي بالشكل الهندسي للمسألة المدروسة ، ففي المثال التطبيقي المدروس وجدنا أن $(N=10)$ تعطي نتائج ذات دقة حدودية مقبولة .

3- وفقاً للأبعاد الهندسية $(R ; a)$ المطبقة عددياً وجدنا أن قيمة الإجهادات في النقاط المحددة في الجدول (1) ، وقيمة معامل تركيز الإجهادات في الطريقتين الأولى والثالثة على التوالي : $1.9842 ; 2.071 = k$ ، وتقترب من نتائج مسألة " Kirsch " الخاصة حيث : $k = 2$.

4- من خلال استخدام العديد من نماذج العناصر المحدودة الموجودة في مكتبة برنامج ANSYS وجدنا أن العنصر " PLANE 145 " هو أكثر العناصر ملاءمة للمسألة المدروسة حيث أنه أعطى نتائج قريبة من الحل التحليلي والشروط الطرفية .

5- من خلال استثمار إمكانية البرنامج "ANSYS" في اختيار نعومة شبكة العناصر المحدودة وجد أن اختيار شبكة ناعمة جداً ليس له تأثير واضح على دقة النتائج وبالتالي يكتفى بخيار الحالة المثالية " Idealization " للشبكة التي يعطيها البرنامج .

6- يمكن دراسة المسألة السابقة عندما يكون الثقب غير دائري " قطع ناقص مثلاً [2] " وعند تطبيق قوة شادة وفق محور وقوة ضاغطة وفق المحور الآخر لكن هذا يتطلب إعادة في التشكيل الرياضي والصياغة البرمجية للطريقة الأولى ، بينما لا يتطلب سوى جهد بسيط في الطريقة الثالثة .

References

- 1- S.Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1970.
- 2- C.P.Demedoff, Theory of Elasticity, High School , Moscow , 2002.
- 3- N.J.Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordoff, Goningen, 1953.
- 4- P.K Banerjee and R. Butterfield, Boundary Elements in Engineering Science. McGraw-Hill, New Jersey, 1996.
- 5- Savin, G.N. Stress Concentration around Holes. Pergamon Press, London, 1961.
- 6- Amenzade, U.A. Theory of elasticity. High School, Moscow, 271P. 1967.
- 7- Bahteyarof, U.A .one the torsion of prismatic beam with a doubly connected domain. Physical Mathematical and Mechanics of Sciences Series, no.4, 32-36.1972.
- 8- Bathe, K. j. Finite element procedure in engineering analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2001.
- 9- John F. Abel , Introduction to the finite element method and numerical method for engineering analysis, VNR Company, New York, 1983.
- 10- ANSYS , Theory Reference . Release 5.4 Edited by Peter Konhke, PhD, 2004.
- 11 - Ihssan Tarsha, Stress Distribution in a Thick-Walled Cylinder With tow Circular Holes Under Torsion Moment, Journal of AL-Baath University, Vol.19,2001.
- 12 -Ihssan Tarsha, Numerical method analysis For solution an elasticity problem, Journal of AL-Baath University, Vol.23,2001.
- 13 - Ihssan Tarsha and Soha Wahby, Using the Conformal Mapping In Complex Variables Method, Journal of Bassel AL-Assed for Engineering Sciences, Vol.2,2004.
- 14 - Ihssan Tarsha and Soha Wahby, Solving some of the third fundamental Boundary Problems by Conformal Mapping, Journal of Bassel AL-Assed for Engineering Sciences, Vol.3,2006.