نموذج تخطيطي– رياضي لإيجاد منحني التقاطع بين السطوح الدورانية والمستويات العامة والخاصة*

ملخص البحث

سوف نقوم في هذا البحث بإيجاد نموذج جديد من أجل حل مسألة منحني التقاطع الكائن ما بين السطوح الدورانية والمستويات. النموذج المراد الحصول عليه هو نموذج تخطيطي – رياضي، ولهذا السبب فإن المسألة المدروسة يتم حلها بطريقة تخطيطية وتحليلية معاً من خلال الرسم الهندسي والمعادلات الرياضية.سوف ندرس حالة خاصة من السطوح الدورانية وهي تلك السطوح التي محور دورانها هو مستقيم شاقولي يوازي المحور Oz. أما المستويات القاطعة فإننا سندرسها في حالتين: الحالة العامة والحالة الخاصة. يتم تعريف المستوي القاطع بواسطة ثلاث نقاط، هي عبارة عن نقاط تقاطع آثاره مع المحاور الإحداثية الثلاث.تقوم تقنية الحل على استخدام المستويات المساعدة الأفقية والتي تتقاطع مع السطح الدوراني مشكلة دوائر أفقية، وتتقاطع مع المستوي القاطع مشكلة مستقيمات أفقية. إن نقطتي التقاطع الكائنتين ما بين كل ثنائية مؤلفة من دائرة أفقية ومستقيم أفقي ناتجين هما نقطتين من منحني التقاطع. بإستخدام عدد كاف من المستويات المساعدة يمكننا تحديد منحني التقاطع بشكل كامل. سوف يتم التعبير عن كافة العناصر الهندسية وتقاطعاتها بواسطة معادلات تحليلية، في حين أنه سوف يتم تمثيلها رسومياً باستخدام قواعد الهندسة الوصفية.

* د.م. تيسير خليل – أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة المدنية

نموذج تخطيطي– رياضي لإيجاد منحني التقاطع بين السطوح الدورانية والمستويات العامة والخاصة*

مقدمة

يتولد السطح الدوراني نتيجة لدوران منحنٍ ما حول محور ثابت. كل نقطة من المنحني المولد ترسم دائرة واقعة في مستوٍ عمودي على المحور بحيث يقع مركزها على هذا المحور [1,4]. نسمي الدوائر الناتجة بدوائر العرض، وبالتالي فنقول بأن السطح الدوراني قابل للانزلاق على نفسه أثناء الدوران [2].

إذا رسمنا على السطح الدوراني أي منحني آخر غير المنحني المولد فإنه يولد أيضاً بدورانه حول المحور نفس السطح الدوراني شريطة أن يكون قاطعاً لجموع دوائر العرض [1,5].

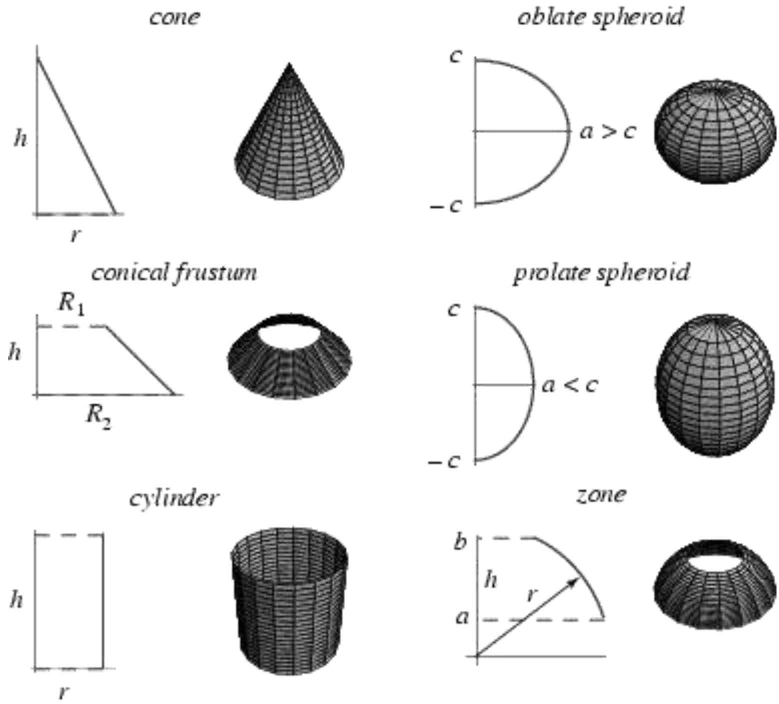
نسمي المستوي المار بمحور الدوران بمستوي الزوال، والمنحني الحاصل من قطع السطح بهذا المستوي يسمى خط الزوال أو المنحني المولد، أي إن السطح الدوراني يتولد من دوران خط الزوال. إن مستوي الزوال هو مستوي تناظر للسطح. جميع خطوط الزوال متساوية وتتكون من نصفين متناظرين بالنسبة لمحور الدوران.

في كل نقطة من السطح الدوراني تمر دائرة عرض ويمر خط زوال وهما منحنيان متعامدان، وبالتالي فإن مماسيهما في تلك النقطة متعامدان [٣].

يمثل السطح الدوراني عادةً في وضع يكون فيه محور الدوران شاقولياً، وفي هذا الوضع يسمى خط الزوال الواقع في المستوي الجبهي للإسقاط المار بالمحور خط الزوال الرئيسي، ويظهر بشكله الحقيقي على المستوي الجبهي [2,4]. يبين الشكل (١) أمثلة مختلفة للسطوح الدورانية والمنحنيات المولدة لها [5].

---

* د.م. تيسير خليل – أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة المدنية



الشكل (1)

دراسة التقاطع في الحالة التي يكون فيها للمستوي حالة خاصة

السطح الدوراني الذي سوف يتم دراسته في هذا البحث يتم تعرفه عن طريق محور دوران شاقولي ومنحني توليد. يقع كل من محور الدوران ومنحني الدوران في مستوٍ واحد، هو المستوي Oxz، كما هو مبين في الشكل (2).

يعطى المنحني المولد للسطح الدوراني بالعلاقة

$$z = f(x) \qquad \ldots(1)$$

نحدد النقطة $O_1(x_1, y_1, 0)$ الواقعة على المحور o ، بحيث أن O_1'' وهي المسقط الجبهي للنقطة O_1 تقع على المحور Ox الذي يمثل خط الأرض.

سوف ندرس تقاطع السطح الدوراني السابق مع المستوي الشاقولي $\alpha(\alpha_x,\alpha_y,0)$، حيث α_x هي نقطة تقاطع المستوي α مع المحور Ox ، و α_y هي نقطة تقاطع المستوي مع المحور Oy.

يظهر المستقيم الشاقولي o على مستوي الإسقاط الجبهي Oxz بطوله الحقيقي، في حين أن هذا المستقيم الشاقولي يظهر كنقطة على مستوي الإسقاط الأفقي Oxy.

إن الأثر الأفقي α' للمستوي α على المستوي الأفقي للإسقاط Oxy ينطبق على المستقيم α_1، أي أن $\alpha' = \alpha_1$.

باستخدام المستويات المساعدة الأفقية يمكن أن نوجد نقاط التقاطع الكائنة بين السطح الدوراني المدروس والمستوي α. فمثلاً المستوي الأفقي β والذي راقمه z_A يتقاطع مع السطح الدوراني ويكون ناتج التقاطع هو دائرة نصف قطرها r_A.

إن مسقط منحني التقاطع على المستوي الأفقي للإسقاط هو عبارة عن مستقيم ومسقطه على المستوي الجبهي للإسقاط هو عبارة عن منحني مؤلف من مجموعة من النقاط التي يتم تحديدها باستخدام المستويات المساعدة الأفقية. عن طريق استخدام عدد كاف وكبير نسبياً من المستويات المساعدة الأفقية فإنه من الممكن إيجاد ورسم منحني التقاطع بعد إيجاد مجموع نقاط التقاطع للمستويات المساعدة.

كل نقطة $A''(x_A, z_A)$ تقع على المنحني المولد ترسم أثناء دورانها حول محور الدوران o دائرة نصف قطرها

$$r_A = x_A - x_1 \qquad \ldots(2)$$

يمكن إيجاد نظير النقطة A'' بالنسبة لمحور الدوران o ولتكن النقطة $A''(x_{A_1}, z_A)$ ، حيث

$$x_{A_1} = 2x_1 - x_A \qquad \ldots(3)$$

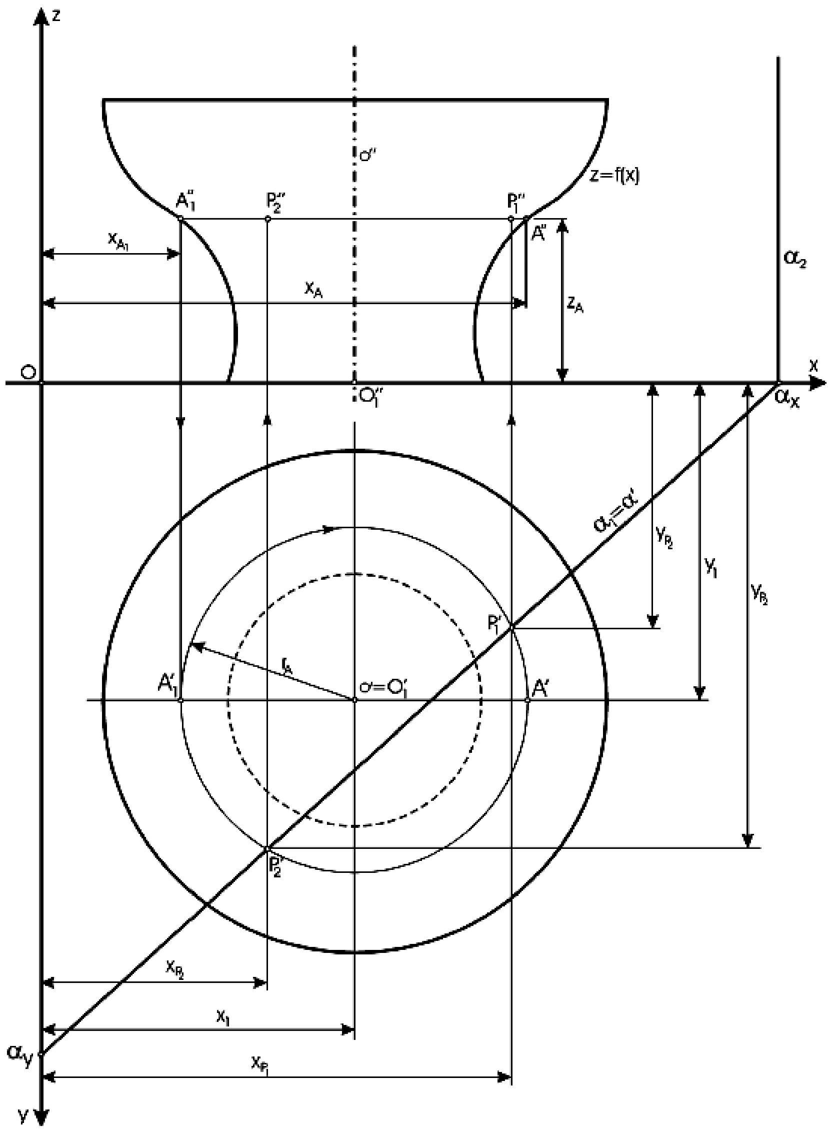
المستقيم α_1، والذي هو الأثر الأفقي للمستوي α مع المستوي الأفقي للإسقاط Oxy، يعطى بالعلاقة التالية

$$y = a_{\alpha_1} x + b_{\alpha_1} \qquad \ldots(4)$$

حيث

$$a_{\alpha_1} = -\frac{\alpha_y}{\alpha_x}$$

$$b_{\alpha_1} = \alpha_y$$



الشكل (2)

النقطتين P_1 و P_2 تقعان على منحني التقاطع ولهما نفس الراقم z_A، حيث z_A هو راقم النقطة A. يمكن إيجاد النقطتين P_1 و P_2 عن طريق إيجاد مسقطيهما الأفقي في بادئ الأمر عن طريق دراسة تقاطع الدائرة ذات نصف القطر r_A والمستقيم α. عن طريق تعويض معادلة المستقيم α_1 في معادلة مجموعة الدوائر ذات العلاقة

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_A^2 \qquad \ldots(5)$$

وبالتعويض والإصلاح نحصل على علاقة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x لها الشكل التالي

$$ex^2+fx+g=0 \qquad \ldots(6)$$

حيث أن كل من e و f و g ثوابت تعطى بالعلاقات

$$e=1+a_{\alpha_1}^2$$
$$f=2\left[a_{\alpha_1}(b_{\alpha_1}-y_1)-x_1\right]$$
$$g=x_1^2+(b_{\alpha_1}^2-y_1)^2-r_A^2$$

وبحل المعادلة السابقة يمكننا إيجاد قيمة الإحداثي x وذلك وفق العلاقة المعروفة التالية

$$x_{P_{1,2}}=\frac{-f\pm\sqrt{f^2-4eg}}{2e} \qquad \ldots(7)$$

ونعلم أن حل مثل هذه المعادلات من الدرجة الثانية، إما أن يكون على شكل جذرين حقيقيين متباينين ، أو على شكل جذر حقيقي مضاعف ، أو على شكل جذرين عقديين متباينين. وما يحدد طبيعة الحل هو قيمة المميز Δ، حيث

$$\Delta=\sqrt{f^2-4eg}$$

فإذا كان $\Delta \succ 0 \Leftarrow$ لدينا نقطتي تقاطع حقيقيتين

وإذا كان $\Delta = 0 \Leftarrow$ لدينا نقطة تقاطع حقيقية واحدة

وإذا كان $\Delta \prec 0 \Leftarrow$ لا توجد نقاط تقاطع حقيقية

بعد أن حددنا الإحداثي x_P لنقطتي التقاطع، يمكن أن نحدد الإحداثي الثاني y_P، والذي يعطى بالعلاقة

$$y_{P_{1,2}}=a_{\alpha_1}x_{P_{1,2}}+b_\alpha \qquad \ldots(8)$$

المسقط الجبهي لنقطتي التقاطع يعطى بالإحداثيين x و z، حيث

$$P_1''(x_{P_1}, z_A)$$

$$P_2''(x_{P_2}, z_A)$$

دراسة التقاطع في الحالة التي يكون فيها للمستوي الحالة العامة

يمكن تحديد المستوي α في الحالة العامة بواسطة النقاط الثلاث α_x و α_y و α_z، ونرمز المستوي α بالرمز $\alpha(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. النقاط الثلاث α_x و α_y و α_z تمثل نقاط تقاطع آثار المستوي α مع المحاور الإحداثية الثلاث Ox و Oy و Oz بالترتيب. عند القيام بحل المسألة في الحالة العامة نجد أن طريقة الحل تصبح معقدة نسبياً، وهنا أيضاً يتم اللجوء في الحل إلى استخدام المستويات الأفقية المساعدة، كما هو موضح في الشكل (3). هذه المستويات المساعدة تتقاطع مع المستوي P بمستقيمات أفقية وتتقاطع مع السطح الدوراني بدوائر.

في البداية يمكن أن نوجد نقطة التقاطع $S(x_1, y_1, z_S)$ الكائنة بين المحور o والمستوي المعطى. عند الإسقاط على المسقط الأفقي يكون للنقطة S وللمحور o نفس المسقط الأفقي (أي أن المسقطين الأفقيين منطبقين).

بما أن النقطة S تقع في المستوي α، فإنه يمكن أن نحصل على مسقطها الجبهي بتمرير المستقيم الأفقي $H(h', h'')$ من النقطة S.

يعطى المسقط الأفقي h' للمستقيم H بالعلاقة

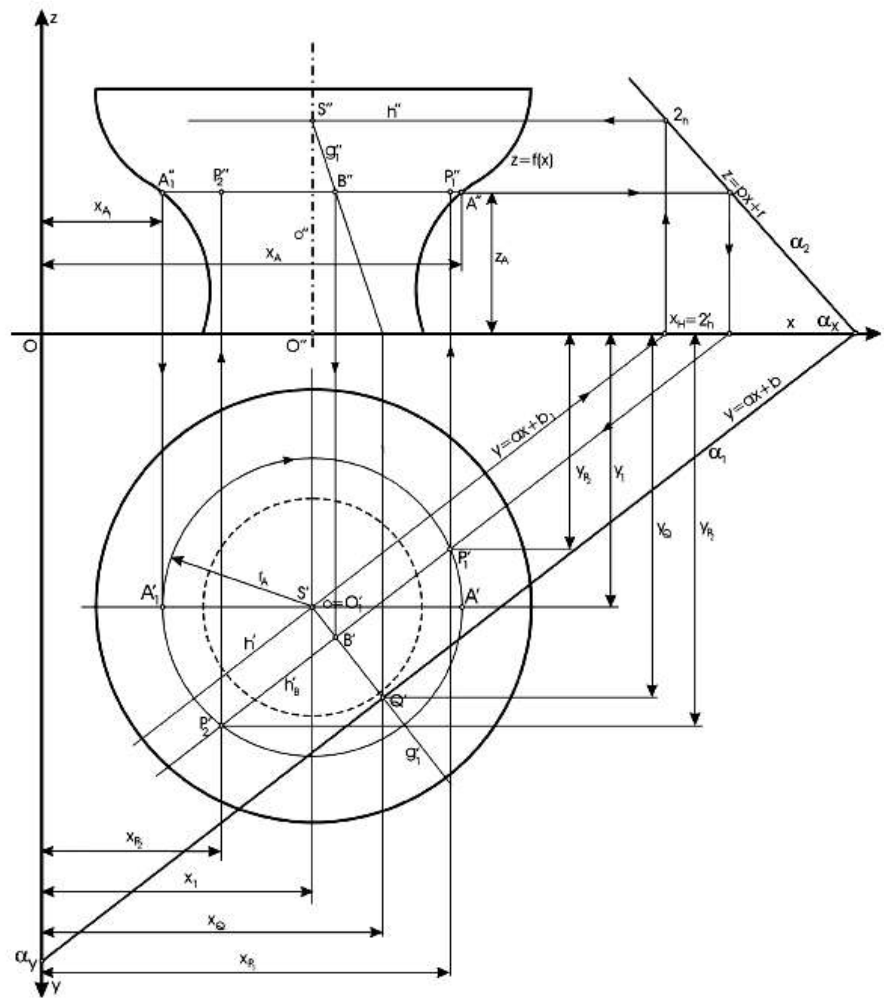
$$y = a_{\alpha_1} x + b_1 \qquad \ldots(9)$$

حيث

$$b_1 = y_1 - a_{\alpha_1} x_1$$

يتقاطع المستقيم h' مع المحور الإحداثي Ox بالنقطة $2_h'(x_H, 0)$ ، حيث

$$x_H = -\frac{b_1}{a_{\alpha_1}} \qquad \ldots(10)$$



الشكل (٣)

المستقيم α_2 والذي يمثل الأثر الجبهي للمستوي α يعطى بالعلاقة

$$z = p_{\alpha_2} x + r_{\alpha_2} \qquad \ldots(11)$$

حيث

$$p_{\alpha_2} = -\frac{\alpha_z}{\alpha_x}$$

$$r_{\alpha_2} = \alpha_z$$

أما راقم النقطة S فهو الإحداثي z_S ويعطى بالعلاقة

$$z_s = p_{\alpha_2} x_H + r_{\alpha_2} \qquad \ldots(12)$$

نمرر المستقيم $G_1(g_1', g_1'')$ الواقع في المستوي α من النقطة S. المستقيم g_1' والذي يمثل المسقط الأفقي للمستقيم G_1' يعامد المستقيم h'، ويكون للمستقيم المعادلة التالية

$$y = m_{g_1'} x + n_{g_1'} \qquad \ldots(13)$$

ويمكننا تحديد قيمة المعامل $m_{g_1'}$ مع الأخذ بعين الاعتبار أن المستقيم g_1' يمر من النقطة $O_1'(x_1, y_1)$، فنجد أن

$$m_{g_1'} = -\frac{1}{a_{\alpha_1}}$$

$$n_{g_1'} = y_1 - m_{g_1'} x_1$$

النقطة Q' هي نقطة التقاطع بين المستقيم α_1 و المستقيم g_1'، ويكون لنقطة الإحداثيات Q'

$$\left.\begin{aligned} x_Q &= \frac{n_{g_1'} - b_{\alpha_1}}{a_{\alpha_1} - m_{g_1'}} \\ y_Q &= a_{\alpha_1} x_Q + b_{\alpha_1} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(14)$$

يحتوي المستقيم g_1'' على المسقط الجبهي للنقطتين S و Q ، ويعطى بالعلاقة

$$z = m_{g_1''} x + n_{g_1''} \qquad \ldots(15)$$

حيث

$$m_{g_1''} = \frac{z_S}{x_1 - x_Q}$$

$$n_{g_1''} = -m_{g_1''} x_Q$$

وصار الآن بالإمكان تحديد منحني لتقاطع. يتقاطع المستقيم الأفقي والذي راقمه z_A مع المستقيم g_1'' في النقطة $B''(x_B, z_B)$، حيث

$$x_B = \frac{z_A - n_{g_1''}}{m_{g_1''}} \qquad \ldots(16)$$

النقطة $B'(x_B, y_B)$ تقع على المستقيم g'_1 ، ويكون

$$y_B = m_{g'_1} x_B + n_{g'_1} \qquad \ldots(17)$$

يتم رسم المستقيم h'_B المار من النقطة B' بحيث أن له المعادلة التالية

$$y = a_{\alpha_1} x + s \qquad \ldots(18)$$

حيث

$$s = y_B - a_{\alpha_1} x_B$$

وعن طريق تعويض معادلة المستقيم h'_B في معادلة المستقيم الموازي والمار من النقطة A ، فإننا نحصل على المعادلة التالية من الدرجة الثانية

$$e_1 x^2 + f_1 x + g_1 = 0 \qquad \ldots(19)$$

حيث

$$e_1 = 1 + a_{\alpha_1}^2$$

$$f_1 = 2\left(a_{\alpha_1}(s - y_1) - x_1\right)$$

$$g_1 = x_1^2 + (s - y_1)^2 - r_A^2$$

أما ناتج التقاطع مع الدائرة التي تحوي على النقطة A فيكون عبارة عن النقطتين P_1 و P_2 ويكون مسقطاهما الأفقيان هما النقطتان $P'_1(x_{P_1}, y_{P_1})$ و $P'_2(x_{P_2}, y_{P_2})$ ، وأما مسقطاهما الجبهيان فهما النقطتان $P''_1(x_{P_1}, z_A)$ و $P''_2(x_{P_2}, z_A)$ ، حيث

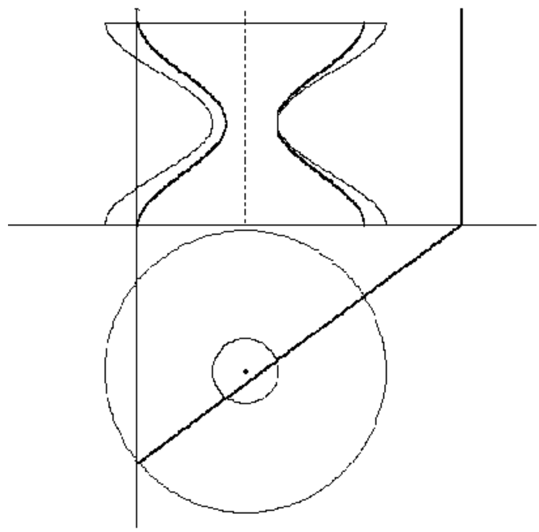
$$x_{P_{1,2}} = \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4e_1 g_1}}{2e_1} \qquad \ldots(20)$$

$$y_{P_{1,2}} = a_{\alpha_1} x_{P_{1,2}} + s \qquad \ldots(21)$$

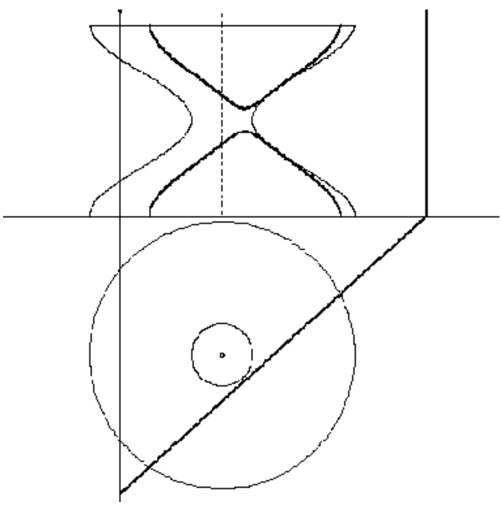
الأمثلة العملية

يبين الشكلين (4) و (5) سطحاً دورانيا تم قطعه بواسطة مستوٍ قاطع له وضعية خاصة (المستوي القاطع هو مستوي شاقولي)، كما يبين هذين الشكلين منحني التقاطع الناتج.

المستوي الشاقولي القاطع في الشكل (٥)، وعلى خلافه في الشكل (4)، يقطع الدائرة الصغيرة التي تظهر في المسقط الأفقي. ويمكننا ملاحظة الفرق في منحني التقاطع الناتج في الحالتين.



الشكل (5)



الشكل (4)

نتائج البحث

تم في هذا البحث وضع نموذج تخطيطي – رياضي لإيجاد منحني التقاطع الكائن بين سطح دوراني ومستوٍ قاطع وذلك في الحالة التي يكون فيها للمستوي وضعية خاصة بالنسبة لمستويات الإسقاط وفي الحالة التي يكون للمستوي القاطع وضعية عامة بالنسبة لمستويات الإسقاط، أي أنه مستوٍ كيفي. يعتمد هذا النموذج على استخدام طريقة المستويات المساعدة. لقد تمكنا في هذا البحث من تعريف العناصر الهندسية تحليلياً عن

طريق كتابة المعادلات التحليلية لمساقطها، عوضاً عن المعادلات التحليلية لها في الفراغ. وبناءً عليه فإن لكل جسم هندسي في الفراغ معادلة تحليلية تحدد مسقطه الأفقي ومعادلة تحليلية أخرى تحدد مسقطه الجبهي ومعادلة تحليلية أخرى تحدد مسقطه الجنبي، وكل معادلة من هذه المعادلات تحوي متحولين فقط من المتحولات الثلاث x أو y أو z ، لأنها معادلة لعنصر هندسي مستوي، في حين أن لهذا الجسم في الفراغ معادلة تحليلية واحدة تحوي المتحولات الثلاث معاً x و y و z. وبهذا الشكل نكون قادرين على إيجاد المعادلة التحليلية التي تعرف منحني التقاطع من وجهة النظر الفراغية والمعادلات التي تعرف منحني التقاطع عن طريق مساقطه.

المراجع العلمية

1 **Чорбаджиев Др. ,** *Десқриптивна геометрия* , Наүқа и изқүство , София 1992.

2 **Н. Узунов** *Десқриптивна геометрия* , София 1995.

3 **C. Roubaudi ,** *Traité de GEOMETRIE DESCRIPTIVE* **,** 120 Bed St. Germin , Paris.

4 **E. L. Ince ,** *Principles of Descriptive Geometry* **,** Edward Arnold & Co. , London.

٥ موقع إلكتروني على شبكة الإنترنت:

http://www.mathworld.wolfram.com

A Graphical-Mathematical Model For Determining The Intersecting Curve Between The Surfaces Of Revolution And General And Special Planes

Abstract

In this research, we will find a new model for determining the intersection curve between surfaces of revolution and planes. The aimed model is an graphical-mathematical model, and for this reason the studied problem is been solved geometrically and analytically at the same time by means of geometrical drawing and mathematical equations. We will study a special case for the surface of revolution, which is the surface whose revolution axis is vertical and is parallel to the Oz axis. Whereas the intersecting plane is been studied in two cases: a general case and a special case. An intersecting plane is been defined by three points, which are the intersection points between the plane's traces and the three coordinate axis. The solving technique is based on using auxiliary horizontal planes, which intersect with the surface of revolution forming horizontal circles, and which intersect with the intersecting plane forming horizontal lines. The two intersection points between each pair consisting of the resulting horizontal circle and the resulting horizontal line are two points of the intersecting plane. By using an adequate number of auxiliary planes, we can determine the whole intersection curve. We will represent all geometrical elements and their intersections by analytical equations, while these elements and their intersections are represented geometrically by using descriptive geometry principles.