طريقة جديدة للحصول على المساقط في الجملة الإكسونومترية عن طريق تدوير المستويات الإحداثية الإكسونومترية •

ملخص البحث

سوف ننطلق في هذا البحث من ثلاثي وجوه أوجهه مثلثات معرف بثلاث مستويات إحداثية ومستوٍ رابع سوف ندهوه بمستوي الشكل أو مستوي الإسقاط الرئيسي، وهذا المستوي يمر من رأس ثلاثي الوجوه المذكور. بعد ذلك سوف نعرف المساقط الرئيسية، أو ما يعرف بمساقط ثلاثي الوجوه، وهي تلك المساقط الناتجة عن تدوير المستويات الإحداثية الثلاثة باتجاه الخارج بالنسبة لثلاثي الوجوه. في كل مستوٍ إسقاط هناك عدد من المساقط الرئيسية المميزة بغض النظر عن اتجاه الإسقاط، وبالتالي فإنه يمكننا وانطلاقاً من مساقط ثلاثي الوجوه من الحصول على المنظور الإكسونومتري الممثل لهذه المساقط. بواسطة هذه العملية يمكننا تبسيط عملية الإنشاء الهندسي للنظام الأكسونومتري حيث نتمكن من تحديد مساقط المحاور انطلاقاً من المساقط الرئيسية كما نتمكن من تحديد المقاييس الإكسونومترية الثلاث انطلاقاً من المحاور. إن هذا التعريف الجديد لمساقط ثلاثي الوجوه الواردة في هذا البحث يعتبر طريقة بسيطة من أجل فهم منظومة التمثيل الهندسي المناسبة للعملية التدريسية بالإضافة إلى ملاءمتها للتطبيقات العملية.

• د.م. تيسير خليل – أستاذ في قسم العلوم الأساسية في كلية الهندسة المدنية

م. رغيد عبد الصمد – قائم بالأعمال في كلية الهندسة المدنية

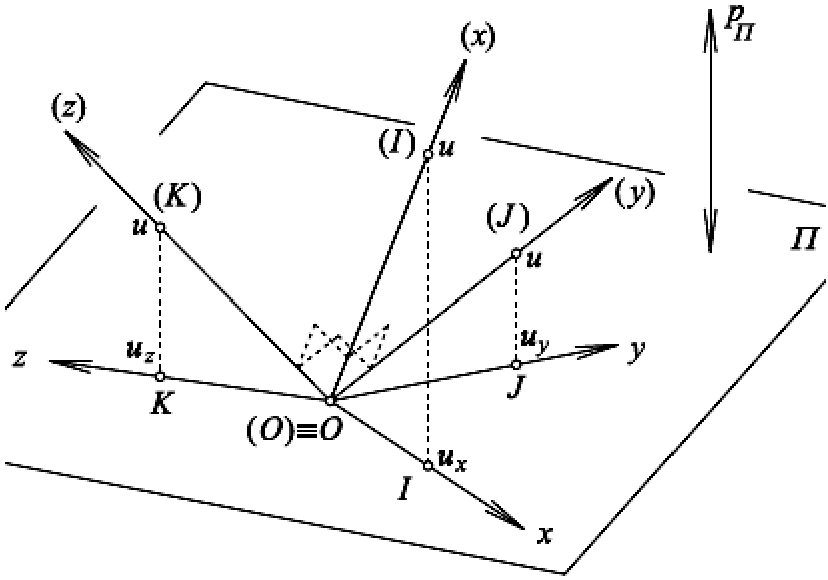
طريقة جديدة للحصول على المساقط في الجملة الإكسونومترية عن طريق تدوير المستويات الإحداثية الإكسونومترية

1- لمحة تاريخية:

لم يتم وضع أسس ومبادئ الرسم الأكسونومتري إلا في وقت متأخر نسبياً وبعد مدة طويلة من استخدام هذه الطريقة في التمثيل الهندسي إلى أن جاء عالم الرياضيات W. Farish ونشر بحثه في عام 1820 بعنوان المنظور الإيزومتري وفيه قدم طريقة جديدة في التمثيل انت هي في الواقع طريقة الإكسونومترية الإيزومترية العمودية دون أن يسميها. في عام 1844 العالم L. J. Weisbach أعطى طريقة في الإسقاط اعتماداً على الأسس الرياضية المعروفة في ذلك الوقت من أجل رسم المنظور الأكسونومتري. عام 1860 العالم K. Pohlke قدم نظريته في رسم المنظور الإكسونومتري المائل. إن الأسس والقواعد العلمية للمنظور الأكسونومتري العمودي وضعها العالم Schesller في عام 1905 وفق هذه الأسس انتشر استخدام المنظور الأكيسونومتري بكثرة في المجالات العلميو والتقنية.

2- أساسيات الجملة الإكسونومترية:

بدايةً سوف نشرح أساسيات الجملة الإكسونومترية العمودية انطلاقاً من ثلاثي الوجوه المبين في الشكل (1) والذي سوف نسميه ثلاثي الوجوه المرجعي $(O)(x)(y)(z)$ والذي يتشكل من ثلاث مستقيمات (x) ، (y) ، (z) تتلاقى في نقطة تدعى بالذروة (O). وانطلاقاً من الذروة (O) وعلى كل من المستقيمات الثلاثة المذكورة سابقاً، سوف نرسم واحدة قياس الأطوال التي تتمثل بالنقاط (I) ، (J) ، (K) على الترتيب. ندعو المستويات الثلاثة $(I)(O)(J)$ ، $(J)(O)(K)$ ، $(K)(O)(I)$ بالمستويات الإحداثية. هذه المستويات في الحقيقة تتشكل من أوجه ثلاثي الوجوه المرجعي.



الشكل (1)

نأخذ مستوياً رابعاً Π ماراً من الذروة (O) ولا يحوي أياً من مستقيمات ثلاثي الوجوه المرجعي $(O)(x)(y)(z)$. ندعو هذا المستوي بمستوي الإسقاط الرئيسي.

إذا أسقطنا ثلاثي الوجوه المرجعي $(O)(x)(y)(z)$ عمودياً وفق المنحى P_Π فإننا سوف نحصل مباشرةً على مسقطه الإكسونومتري وذلك على مستوي الإسقاط الرئيسي Π متمثلاً بالمحاور x ، y ، z المتلاقية في الذروة $O \equiv (O)$، علماً بأن خاصيتي التوازي وتناسب الأطوال يتم المحافظة عليها في المسقط الإكسونومتري.

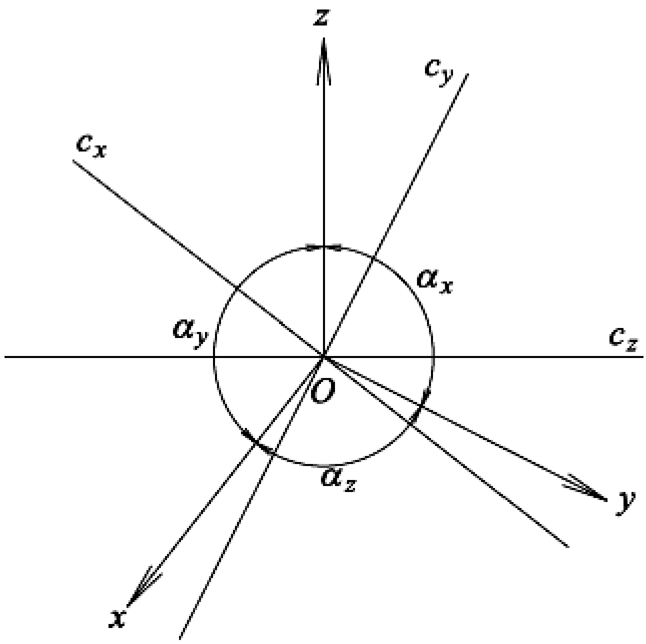
النقاط (I) ، (J) ، (K) يمكن إسقاطها بشكل مشابه، وبالتالي فإننا سوف نحصل على النقاط I ، J ، K على الترتيب، وبالنتيجة نحصل على الأطوال التالية:

$\overline{OI} = u_x$ على المحور x

$\overline{OJ} = u_y$ على المحور y

$\overline{OK} = u_z$ على المحور z

تـدعى هـذه الأطـوال بـالأطوال الواحديـة فـي الإسـقاط الأكسـونومتري واختصـاراً تسـمى بالمقياس الإكسونوتري.



الشكل (2)

يبين الشكل (2) الزوايا الثلاثة المشكلة لمحاور الإسقاط الإكسونومتري وهي:

$$\alpha_z = IOJ$$

$$\alpha_x = JOK$$

$$\alpha_y = KOI$$

إن اختلف قيم الزوايا بين المحـاور الإكسـونومترية الناتجـة عن إسقاط ثلاثـي الوجوه المرجعي هي التـي تحدد نـوع المنظـور الإكسونومتري المستخدم، فإما أن يكـون المنظـور إيزومترياً عند تساوي الزوايا الثلاث، أو أن يكـون ديمترياً عند تسـاوي زاويتين فقط مـن الزوايا الثلاث، أو أن يكون تريمترياً عند اختلاف قيم الزوايا الثلاث.

إضـافةً إلـى ما سبق، لإن الشكل (2) يبين تقاطع مستوي الإسقاط الرئيسـي Π مع المسـتوي الإحـداثي $(I)(O)(J)$. إن نـاتج التقـاطع هـو المسـتقيم $c_z = \Pi \cap (I)(O)(J)$ العمودي على المستقيم (z) وعلى منحى الإسقاط P_Π

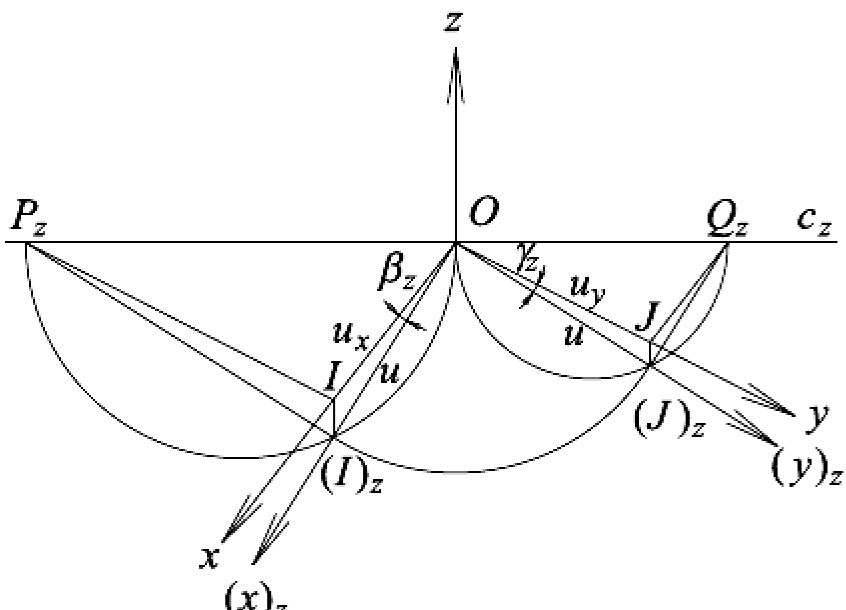
وبالتالي فهو عمودي على المحور (z). وبشكل مشابه فإنه يمكننا تحديد مستقيمي التقاطع الناتجين عن تقاطع مستوي الإسقاط الرئيسي والمستويين الإحداثيين الباقيين كالتالي:

$$c_x = \Pi \cap (J)(O)(K)$$

$$c_y = \Pi \cap (K)(O)(I)$$

3- تدوير ثلاثي الوجوه المرجعي على مستوي الإسقاط الرئيسي:

يبين الشكلين (3) و (4) الخطوات اللازمة لتدوير ثلاثي الوجوه المرجعي على مستوي الإسقاط الرئيسي Π. فالشكل (3) يوضح كيفية تدوير المستوي الإحداثي على مستوي الإسقاط الرئيسي. انطلاقاً من النقطة I (والتي هي عبارة عن المسقط العمودي للنقطة (I) والتي تبعد مسافة u_x عن O على المحور x) نرسم مستقيماً موازياً للمحور y. تقاطع هذا المستقيم مع المستقيم c_z يحدد النقطة P_z. الزاوية $O(I)_z P_z$ والتي قياسها في الفراغ 180^o مثل الزاوية $(I)O(J)$ وبالتالي فإن النقاط الثلاث O ، (I) ، P_z تشكل مثلثاً قائماً.



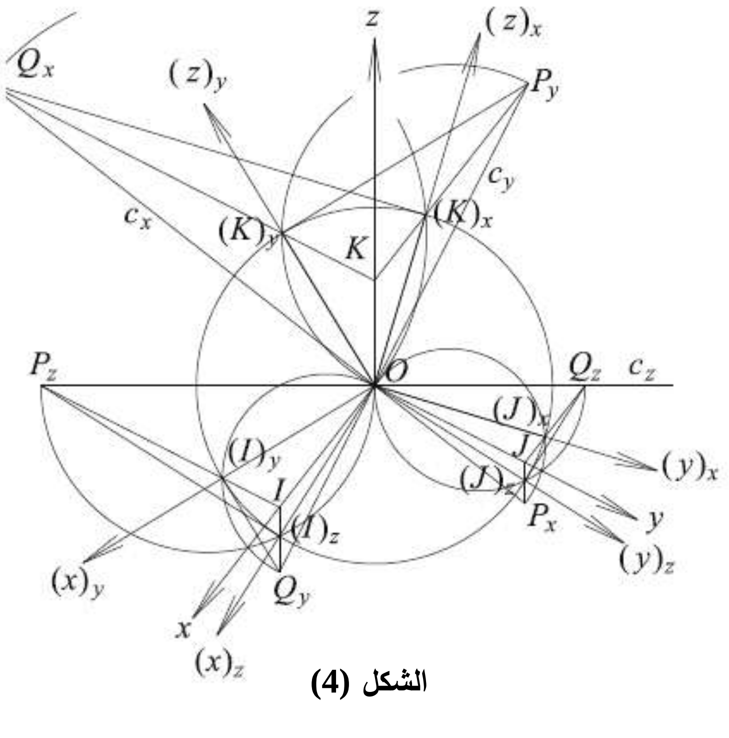
الشكل (3)

يتم تدوير هذا المثلث القائم باتجاه الأسفل على مستوي الإسقاط الرئيسي. لذا نرسم الدائرة التي قطرها OP_z. إن تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم المار من النقطة I والعمودي على المستقيم c_z يحدد النقطة $(I)_z$ والتي هي النقطة الناتجة عن تدوير النقطة I نحو الأسفل. إن قياس المسافة $\overline{O(I)_z}$ هي u ومنحاها يحدد المستقيم $O(x)_z$. نرسم المستقيم $(y)_z$ والعمودي على $(x)_z$. يمثل المستقيمان السابقان الجزء الذي تم تدويره $(x)(O)(y)$ من ثلاثي الوجوه المرجعي بالنسبة إلى مستوي الإسقاط الرئيسي Π.

إذا قمنا برسم واحدة الطول u اعتباراً من O وذلك على المستقيم $(y)_z$ الذي تم تدوره نحو الأسفل، فإننا سوف نحصل على النقطة $(J)_z$. المستقيم المار من هذه النقطة والعمودي على المستقيم c_z يحدد النقطة J الواقعة على المحور y.

تحدد المسافة $\overline{OJ}$ واحدة الطول u_y على المحور y. نرسم مستقيماً ماراً النقطة J وموازياً للمحور x، فيتقاطع مع المستقيم c_z في نقطة هي Q_z. الزوايا المشكلة للمحاور الإكسونومترية مع المحاور الإكسونومترية التي تم تدويرها نحو الأسفل هي:

$$\beta_z = IO(I)_z \quad \text{و} \quad \gamma_z = JO(J)_z.$$



الشكل (4)

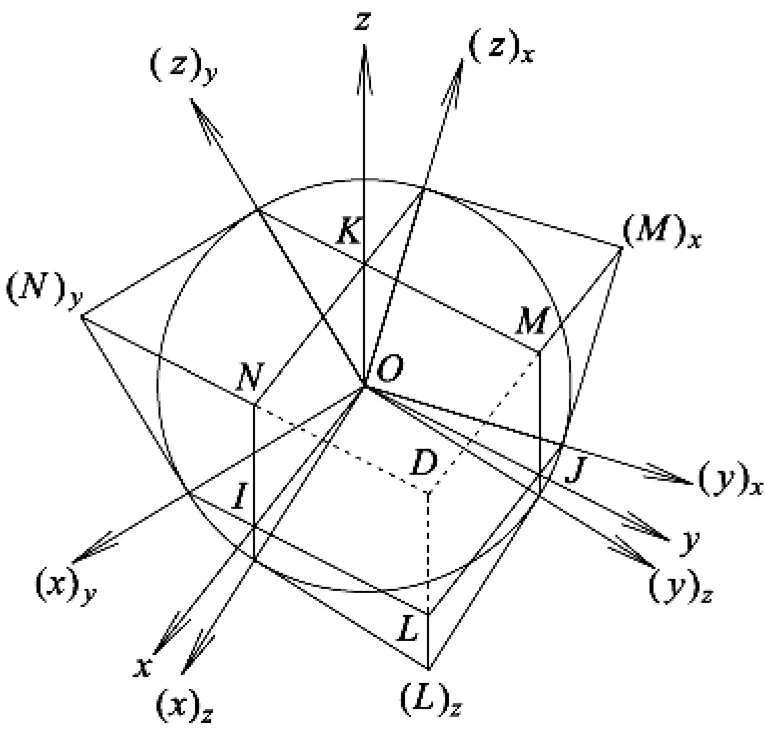
في الشكل (4) نكمل عملية الإنشاء السابقة بنفس الخطوات وذلك بتدوير المستويين الإحداثيين الباقيين من ثلاثي الوجوه المرجعي على مستوي الإسقاط الرئيسي.

نلاحظ في هذا الشكل أيضاً أن كل مستقيم من مستقيمات ثلاثي الوجوه المرجعي يتم تمثيله مرتين على مستوي الإسقاط الرئيسي وذلك كون كل مستقيم مرتبط بمستويين إحداثيين.

4- تدوير ثلاثي الوجوه المرجعي على مستوي الإسقاط الرئيسي:

يبين الشكل (5) العلاقة بين المستويات الإحداثية التي تم إسقاطها والجسم الذي تم تدويره نحو الأسفل على مستوي الإسقاط الرئيسي.

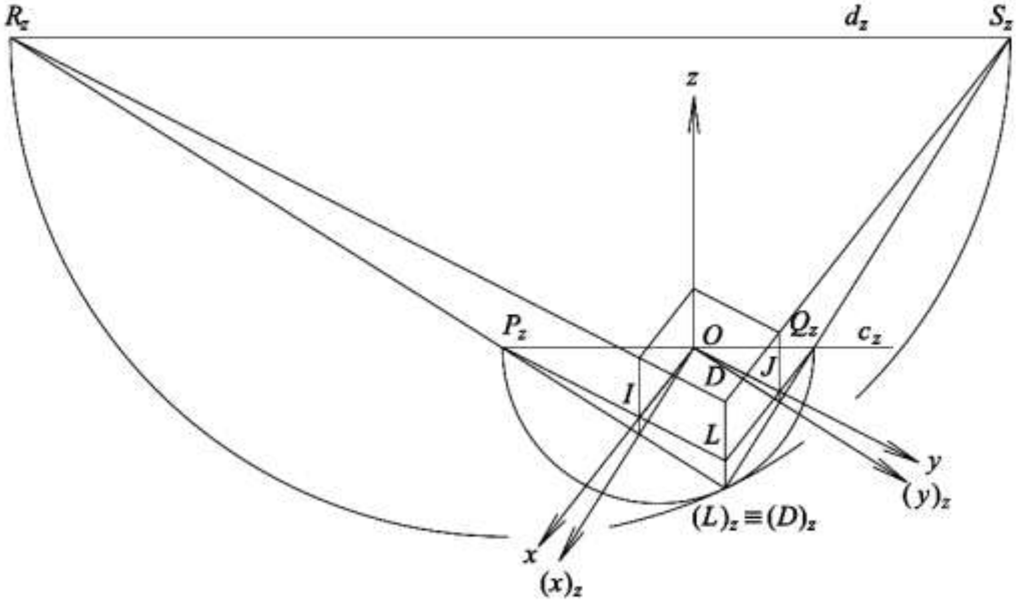
إن هذه المساقط تدعى بالمساقط الرئيسية في الإسقاط الكسونومتري أو مساقط ثلاثي الوجوه اختصاراً.



الشكل (5)

5- الحصول على الجملة الإكسونومترية انطلاقاً من المساقط الرئيسية:

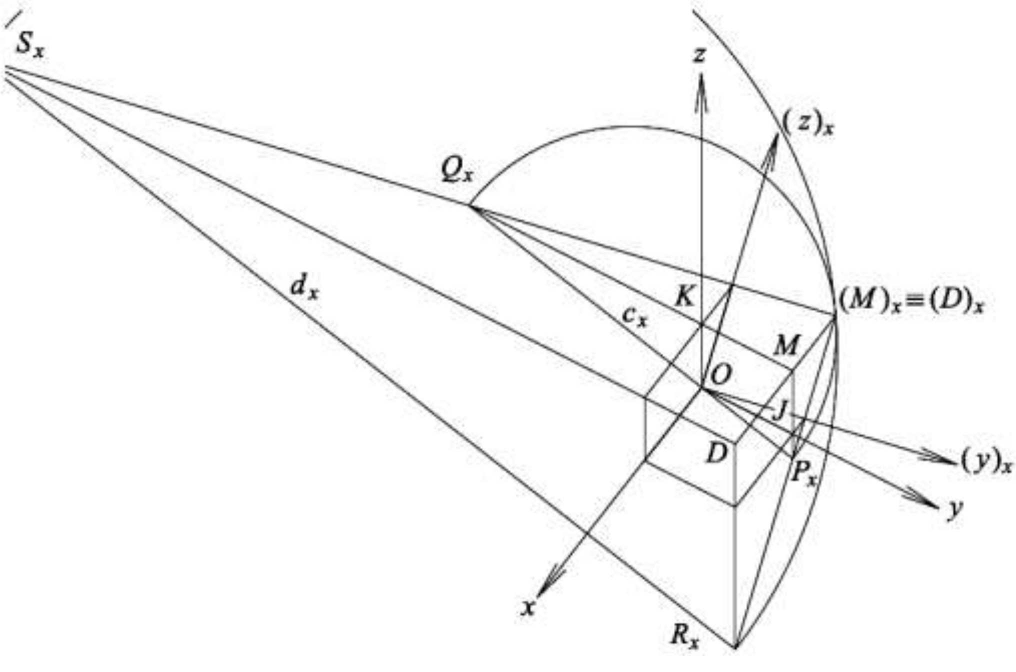
من أجل الحصول على المحاور الإكسونومترية مع المقاييس الأكسونومترية وذلك انطلاقاً من المساقط الرئيسية، فإنه من الضروري أولاً أن نحدد مقدار التدوير لمستوٍ عمودٍ على أي من المحاور الإحداثية الثلاثة وذلك على مستوي الإسقاط الرئيسي. يوضح الشكل (6) كيفية الحصول على التدوير اللازم لمستوٍ عمودٍ على المحور (z) والمار من النقطة D وذلك على مستوي الإسقاط الرئيسي Π.



الشكل (6)

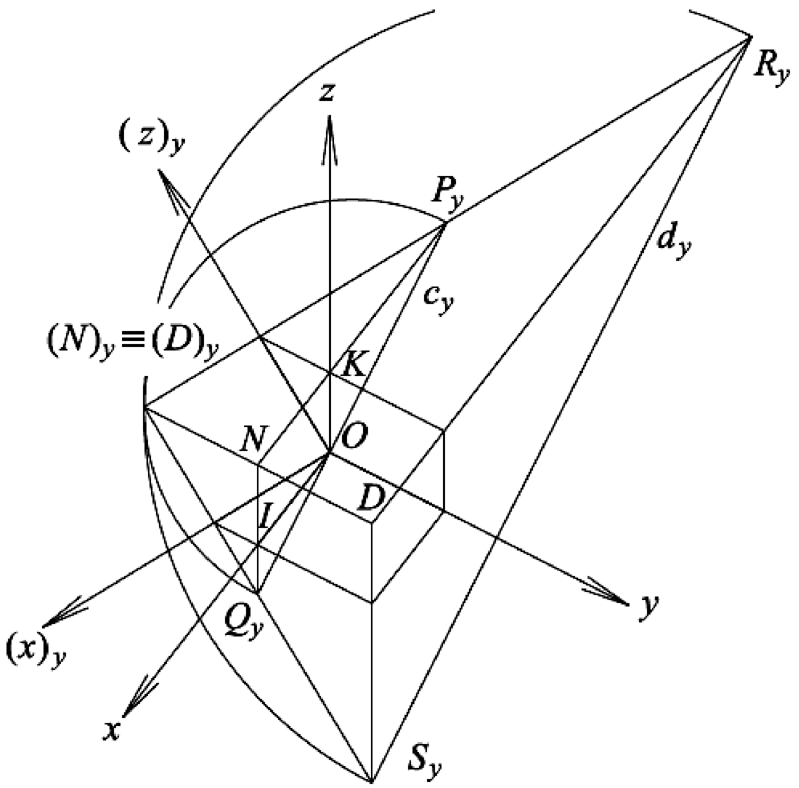
نلاحظ أن المستقيمين LP_z و LQ_z يوازيان المستقيمان DR_z و DS_z على الترتيب. وبذلك يمكننا تحديد المستقيم $d_z \equiv R_z S_z$ والذي هو عبارة عن تقاطع المستوي $R_z(D)S_z$ مع مستوي الإسقاط الرئيسي، وبالتالي فهو يوازي المستقيم c_z. إن الوضع الجديد للنقطتين (L) و (D) والواقعتين في المستويين العموديين على المحور (z) على مستوي الإسقاط الرئيسي وبعد التدوير سوف يكون عند النقطتين $(L)_z \equiv (D)_z$.

في الشكل (7) سوف نقوم بنفس العمليات الإنشائية التي قمنا بها في الشكل (6) ولكن بالنسبة للمحور (x) بدلاً من (z)، وبالتالي سوف نحصل بالنتيجة على الوضع الجديد للنقطتين (M) و (D) الواقعتين في المستويين العموديين على المحور (x) وذلك بالنسبة لمستوي الإسقاط الرئيسي وبعد التدوير سوف يكون $(M)_x \equiv (D)_x$. يجب أيضاً تحديد المستقيم $d_x \equiv R_x S_x$ والذي هو عبارة عن تقاطع المستوي $R_x(D)S_x$ مع مستوي الإسقاط الرئيسي، وهذا المستقيم يوازي المستقيم c_x.



الشكل (7)

في الشكل (8) سوف نقوم بنفس العمليات الإنشائية التي قمنا بها في الشكلين (6) و (7) ولكن بالنسبة للمحور (y) ، وبالتالي سوف نحصل بالنتيجة على الوضع الجديد للنقطتين (N) و (D) الواقعتين في المستويين العموديين على المحور (y) وذلك بالنسبة لمستوي الإسقاط الرئيسي وبعد التدوير سوف يكون $(N)_y \equiv (D)_y$. يجب أيضاً تحديد المستقيم $d_y \equiv R_y S_y$ والذي هو عبارة عن تقاطع المستوي $R_y(D)S_y$ مع مستوي الإسقاط الرئيسي، وهذا المستقيم يوازي المستقيم c_y.



الشكل (8)

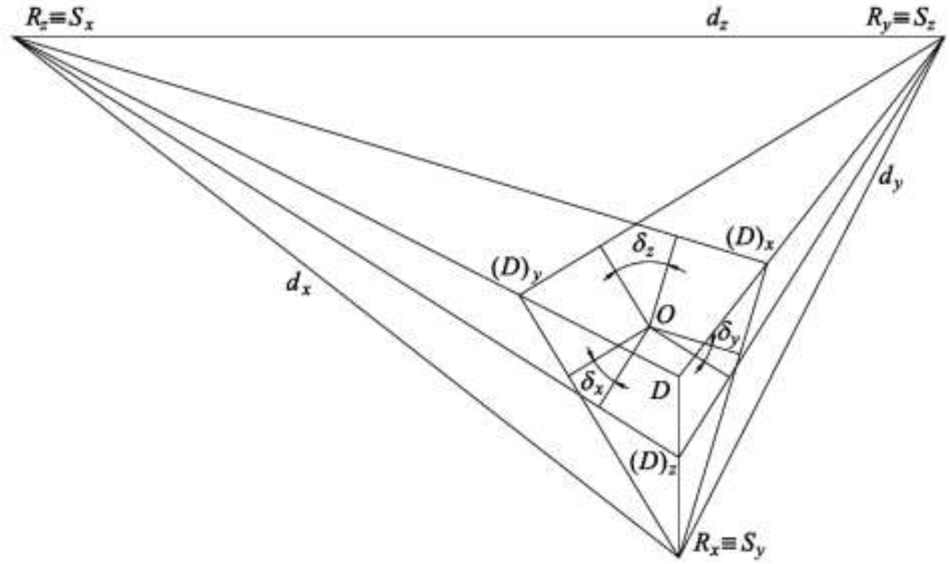
وبإعادة صياغة الأشكال الثلاث السابقة (6) و (7) و (8) في شكل واحد هو الشكل (9)، فإننا نكون قد توصلنا إلى كيفية إنشاء المنظور الإكسونومتري انطلاقاً من المساقط الرئيسية.

المستويات الثلاثة التي تم تدويرها نحو الأسفل بالنسبة إلى مستوي الإسقاط الرئيسي تشكل فيما بينها الزوايا الثلاث:

$$\delta_x = \beta_z + \gamma_y$$

$$\delta_y = \beta_x + \gamma_z$$

$$\delta_z = \beta_y + \gamma_x$$



الشكل (9)

إن المحاور الثلاثة التي تم إسقاطها هي المحاور x ، y ، z جميعها تمر من الذروة O وهي موازية للمستقيمات التالية على الترتيب:

$$DR_y \equiv DS_z$$

$$DR_z \equiv DS_x$$

$$DR_x \equiv DS_y$$

6- النتائج:

تم تعريف المساقط الرئيسية أو ما يعرف مساقط ثلاثي الوجوه كنتيجة لتدوير المستويات الإحداثية الثلاث نحو الخارج بالنسبة لثلاثي الوجوه المرجعي وذلك على مستوي الإسقاط الرئيسي. هذه المستويات الإحداثية الثلاث تمر من رأس ثلاث الوجوه المرجعي.

في كل مستوي إسقاط رئيسي هناك بعض المساقط الرئيسية المتمايزة بغض النظر عن اتجاه الإسقاط، وبذلك تم الحصول على المنظور الإكسونومتري من المساقط الرئيسية لثلاثي الوجوه الناتجة عنه.

لقد عرفنا بعض عمليات الإنشائية الهندسية الجديدة اللازمة لتعريف الجملة الإكسونومترية كتحديد مساقط المحاور انطلاقاً من المساقط الرئيسية وتحديد المقياس الإكسونومتري انطلاقاً من المحاور.

إن هذا التعريف الجديد للمساقط الرئيسية يتيح لنا تبسيط نظام التمثيل الإكسونومتري ووضعه في قالب يسهل عملية استخدامه في العملية التدريسية إضافةً إلى التطبيقات العملية.

المراجع العلمية

١. **J. Krikke**. " *Axonometry: A Matter of Perspective* ", IEEE, Computer Graphics and Application, 20, 4, pp:7-11, 2000.

٢. **P. Schreiber**. " Generalized DescriptiveGeometry " , Journal for Geometry and Graphics, 6, 1, pp: 37-59 , 2002.

٣. **المهندس محمد صالح بساطة.** " *الهندسة الوصفية – الجزء الأول والثاني* "، منشورات جامعة حلب.

٤. **Z. Sklenarikova**, M. Pemova . " *The Pohlke-Schwarz Theorem and its Relevancy in the Didactis of Mathematics* " , Quaderni di Ricerca in Didattica , 17, pp: 152-164, 2007.

5. **F. G. Higbee** . " *The Essentials of Descriptive Geometry* ", New York , John Willy & Sons Inc. , pp: 165-١٧٨, 2000.

6. **M. Hoffmann**: *On the theorems of central axonometry*, Geometry Graphics 2, 151-155, 1997.

A New Method to Obtain the Views in The Axonometric System by Rotating the Axonometric Coordination Planes

Abstract

We will start from a trihedral whose faces are triangles defined by three coordinate planes and a fourth plane which we will call the chart plane or the main projection plane . This plane passes through the vertex of the above mentioned trihedral. After that we will define the main views, which are also known as the views of the trihedral, and they are those views we get as a result of rotating the coordination planes towards the outside of the trihedral. In each projection plane there are a number of unique main views regardless of the projection direction, and therefore we can obtain the axonometric perspective representing these views from the trihedral views. By this method we can simplify the construction process of the axonometric system, where we can determine the projection of the axes from the main views, and we can determine the axonometric scales from the axes. This new definition of the trihedral views included in this paper is considered to be a simple method to understand the system of geometrical representation which is appropriate for the educational process in addition to its appropriateness for the practical applications.