إنشاء المقاطع المستوية في الأجسام الهندسية الفراغية الهرمية والموشورية *

ملخص البحث

تعتبر مسائل إيجاد المقاطع المستوية من المسائل المعقدة والهامة في الهندسة الوصفية. في هذا البحث سنقوم بإيجاد طريقة عامة تمكننا من إيجاد المقاطع المستوية في الأجسام الهندسية الفراغية الموشورية والهرمية، معتمدين على تمثيل كل من الجسم المدروس والمستوي القاطع وتحديد العلاقات الفراغية المنطقية بينهما. سنبين أن هذه الطريقة قابلة للتطبيق مهما كان نوع الإسقاط المستخدم من خلال دراستنا لعدة مسائل ومثالين عددين.

***د.تيسير خليل – أستاذ في قسم العلوم الأساسية في كلية الهندسة المدنية**

إنشاء المقاطع المستوية في الأجسام الهندسية الفراغية الهرمية والموشورية

مقدمة

تم سابقاً دراسة مسائل عديدة تتعلق بإيجاد المقاطع العرضية للأجسام الهرمية والموشورية، ويمكن إجمال كافة المسائل في المسألة العامة التالية:

المسألة : لنفرض أن F هو جسم هندسي فراغي ولنفرض أن α هو مستوي معرف بثلاث نقاط L و M و N غير واقعة على استقامة واحدة، والمطلوب إيجاد المقطع الناتج عن قطع الجسم F بالمستوي α.

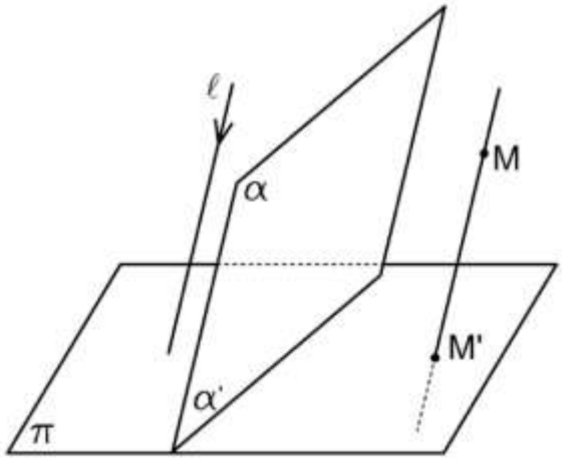
من المفترض أن الجسم الهندسي F والمستوي α ممثلان على مستوي الرسم π والذي يمكن أن يكون عبارة عن لوحة الرسم أو شاشة الحاسب الآلي. إيجاد النقاط المشتركة بين جسمين متقاطعين. ولحل هذه المسألة لا بد لنا بدايةً من التمثيل الصحيح للأجسام الفراغية على مستوي الرسم.

إن مسألة تمثيل الأجسام الفراغية وكافة مسائل القياس المتعلقة بها هي إحدى المواضيع التي تدرسها الهندسة الوصفية. إن الجسم الهندسي الفراغي F يتم تمثيله إما عن طريق رسم مسقط وحيد له أو مسقطين أو عن طريق رسم مساقطه الثلاث المتعامدة. في هذه الدراسة سنعتمد على مسقط واحد للجسم مستخدمين الطريقة الأكثر شيوعاً وهي طريقة الإسقاط المتوازي، ويمكن تعميم الدراسة بشكل مشابه عند استخدام الإسقاط المركزي. ومن أجل شمولية البحث فإننا سنستخدم أيضا الإسقاط الإكسونومتري (كافالبير) وفي المسألة الأخيرة سوف نستخدم الإسقاط المركزي.

تمثيل الأجسام الفراغية

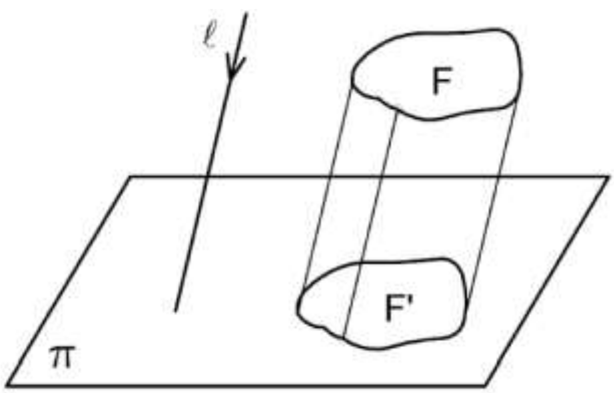
لنفرض أن مستوي الإسقاط (مستوي الرسم) هو المستوي π ولنفرض أنه لدينا أيضاً المستقيم l لا يوازي المستوي π، حيث يعرف هذا المستقيم منحى الإسقاط على المستوي π. ندعو كافة المستقيمات الموازية للمستقيم l بمستقيمات الإسقاط أو بأشعة

الإسقاط. إذا كان لدينا نقطة M فإن شعاع الإسقاط المار عبرها l_M يتقاطع مع مستوي الإسقاط π بالنقطة M' والتي ندوها بمسقط النقطة M على المستوي π، كما هو مبين في الشكل (1).



الشكل (1)

إن F' هو مسقط الجسم الهندسي F وينتج عن إسقاط كافة نقاط الجسم F، كما هو مبين في الشكل (2). إن تمثيل الجسم F يتم عبر الثنائية $F(F')$، حيث أن F هي صورة الجسم المدروس و F' هي صورة المسقط المرسوم على المستوي π. لإنجاز الحل لا بد أن نورد التعريف التالي والنظريات التالية:



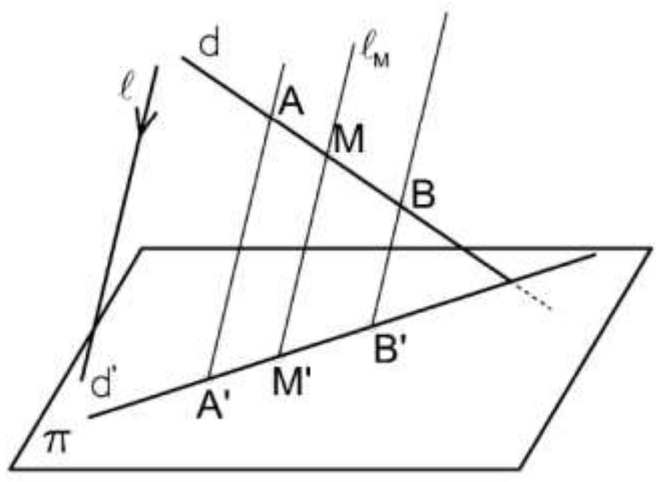
الشكل (2)

تعريف: نقول أن التمثيل $F(F')$ لجسم ما هو تمثيل كامل إذا كانت كل نقطة M من الجسم F قد تم إسقاطها على المستوي π، وبالتالي نحصل على M' على أن تكون M' مسقط وحيد.

نظرية 1: نقول عن النقطة A أنها ممثلة تمثيلاً كاملاً إذا وفقط إذا كان مسقطها A' قد تم تمثيله.

نظرية 2: نقول عن المستقيم d أنه ممثلاً تمثيلاً كاملاً إذا وفقط إذا كان المسقطان A' و B' للنقطتين A و B الواقعتين على المستقيم قد تم تمثيلهما (أي أن النقطتين A و B الواقعتين على المستقيم هما ممثلتان تمثيلاً كاملاً). واستناداً إلى ذلك فإن المستقيم d' المار عبر A' و B' هو مسقط المستقيم d على المستوي π.

البرهان: إن الحالة التي يكون فيها المستقيم d موازياً لشعاع الإسقاط هي حالة واضحة. لنفترض الآن أن المستقيم d وشعاع الإسقاط l غير متوازيين، وأن المستقيم d يقع في المستوي α الحاوي على النقطتين A و B. إن المستقيم d' المار عبر النقطتين A' و B' هو عبارة عن مستقيم التقاطع الكائن بين المستويين α و π، وهو أيضاً مسقط المستقيم d على المستوي π. لتكن النقطة M نقطة واقعة على المستقيم d، ولنرسم المستقيم l_M الموازي لشعاع الإسقاط l وبحيث يتقاطع مع المستقيم d' بالنقطة الوحيدة M'، كما هو موضح بالشكل (3). نسمي النقطة M' بمسقط النقطة M.

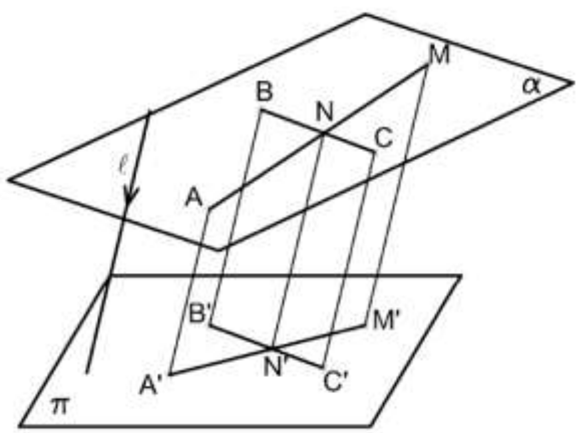


الشكل (3)

نظرية 3: نقول عن المستوي α أنه ممثلاً تمثيلاً كاملاً إذا وفقط إذا كانت المساقط A' و B' و C' للنقاط A و B و C غير الواقعة على استقامة واحدة والواقعة في المستوي α قد تم تمثيلها (أي أن النقاط الثلاث A و B و C ممثلةً تمثيلاً كاملاً).

البرهان: بالعودة إلى برهان النظرية 2، فإن المستقيمات $m = (AB)$ و $n = (BC)$ و $p = (AC)$ هي المستقيمات الثلاثة المارة عبر النقاط A, B و B, C و A, C على الترتيب وهذه المستقيمات هي ممثلة تمثيلاً كاملاً.

إن الحالة التي يكون فيها المستوي α موازياً لشعاع الإسقاط l واضحة. لندرس النقطة M الواقعة في المستوي α والمستقيم (AM) المتقاطع مع المستقيم n بالنقطة N. إن النقطة N' هي مسقط النقطة N ويتم تحديدها بشكل وحيد، وهي تقع على المستقيم $(B'C')$، كما هو مبين في الشكل (4). إن المستقيم $(A'N')$ يتقاطع مع شعاع الإسقاط l_M بالنقطة M'. وبالتالي فالنقطة M' هي مسقط النقطة M على المستوي π وهي محددة تحديداً وحيداً. يتم معالجة الحالة التي يكون فيها المستقيمان (BM) و p أو المستقيمان (CM) و m غير متوازيين بشكل مشابه.



الشكل (4)

مسائل القياس الأساسية

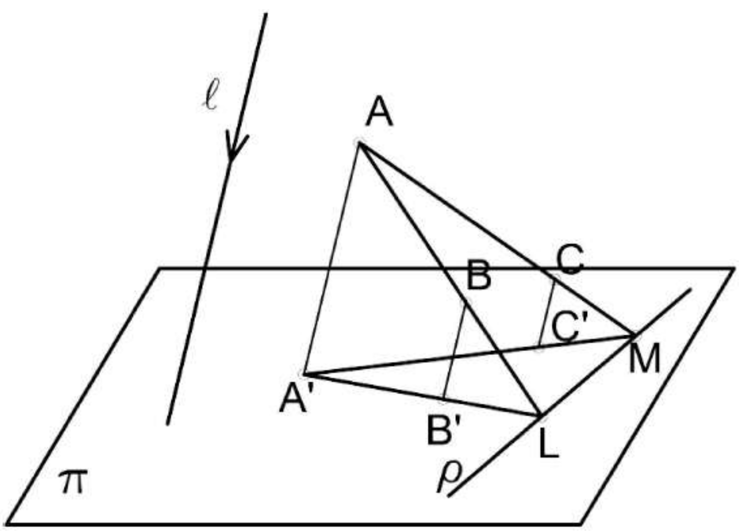
إن المسائل الأربعة التالية هي الأدوات الرئيسية المستخدمة في إنشاء المقاطع المستوية.

المسألة 1: لنفترض أن المستقيم d يمر عبر النقطتين A و B مع العلم أن مسقطيهما على المستوي π هما النقطتان A' و B' على الترتيب، والمطلوب تمثيل أثر المستقيم d على المستوي π.

الحل: إن D أثر المستقيم d على المستوي π وهو عبارة عن نقطة تقاطع المستقيمين $d = (AB)$ و $d' = (A'B')$. إذا كان المستقيمان $d = (AB)$ و $d' = (A'B')$ متوازيان، فعندها الأثر D هو نقطة تقع في اللانهاية.

المسألة 2: لنفرض أن المستوي α يمر عبر النقاط A و B و C غير الواقعة على استقامة واحدة مع العلم أن مساقطها على المستوي π هي النقاط A' و B' و C' على الترتيب، والمطلوب تمثيل ρ أثر المستوي α على المستوي π.

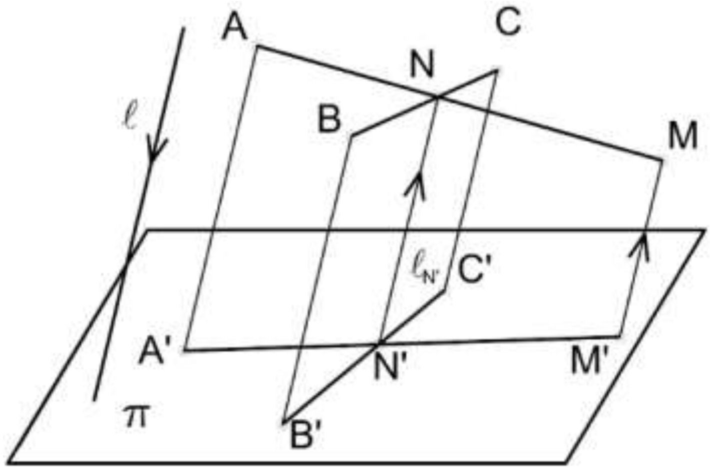
الحل: لنفرض أن L هو أثر المستقيم AB على المستوي π، ولنفرض أن M هو أثر المستقيم AC على المستوي π، وبالتالي فإن $\rho = (LM)$ هو أثر المستوي α على المستوي π، كما هو مبين في الشكل (5). إذا كانت النقطتان L و M تقعان خارج حدود لوحة الرسم، فإنه يلزمنا النقطتان المساعدتان D و E الواقعتين على المستوي α ومسقطاهما هما النقطتان D' و E'، وهنا يلزمنا أيضاً تحديد آثار المستقيمات (AD) و (AE) و (BD) و (BE).



الشكل (5)

المسألة 3: لنفرض أن المستوي α يمر عبر النقاط A و B و C غير الواقعة على استقامة واحدة مع العلم أن مساقطها على المستوي π هي النقاط A' و B' و C' على الترتيب، ولنفرض أن النقطة M' هي نقطة واقعة على مستوي الإسقاط π، والمطلوب تحديد النقطة M وتحديد شعاع الإسقاط l_M.

الحل: يجب أن يكون أحد الأزواج الثلاثة من المستقيمات التالية $((A'M'),(B'C'))$ و $((B'M'),(A'C'))$ و $((C'M'),(A'B'))$ على الأقل متقاطعاً بنقطة تقع ضمن حدود لوحة الرسم، ولنفرض أن المستقيمين $((A'M'),(B'C'))$ يتقاطعان بالنقطة M'، كما هو مبين في الشكل (6).



الشكل (6)

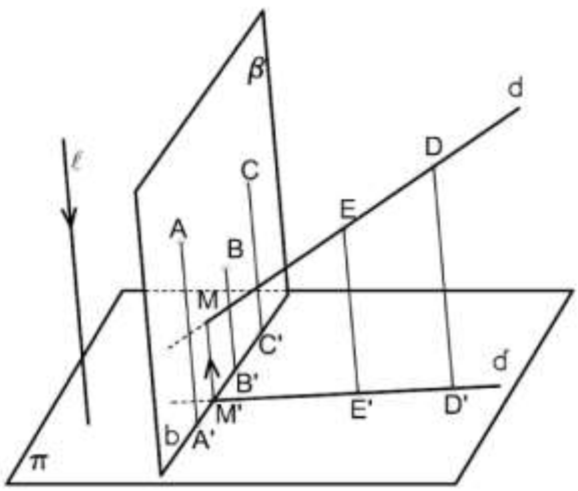
إن شعاع الإسقاط l_N يمكن رسمه وهو يتقاطع مع المستقيم (BC) بالنقطة N. إن المستقيم (AN) وشعاع الإسقاط l_M يقعان في مستوٍ واحد ويتقاطعان بالنقطة M.

المسألة 4: لنفرض أن المستوي β يمر عبر النقاط A و B و C غير الواقعة على استقامة واحدة مع العلم أن مساقطها على المستوي π هي النقاط A' و B' و C' على الترتيب، ولنفرض أن المستقيم d يمر عبر النقطتين D و E مع العلم أن مسقطيهما على المستوي π هما النقطتان D' و E'، والمطلوب تمثيل النقطة M نقطة تقاطع المستوي β والمستقيم d، وفي الحالة التي يكون فيها $d \nparallel l \nparallel \beta$ يطلب رسم المسقط d'' للمستقيم d على المستوي β باعتبار أن شعاع الإسقاط هو l.

الحل: يمكن تمييز الحالات التالية:

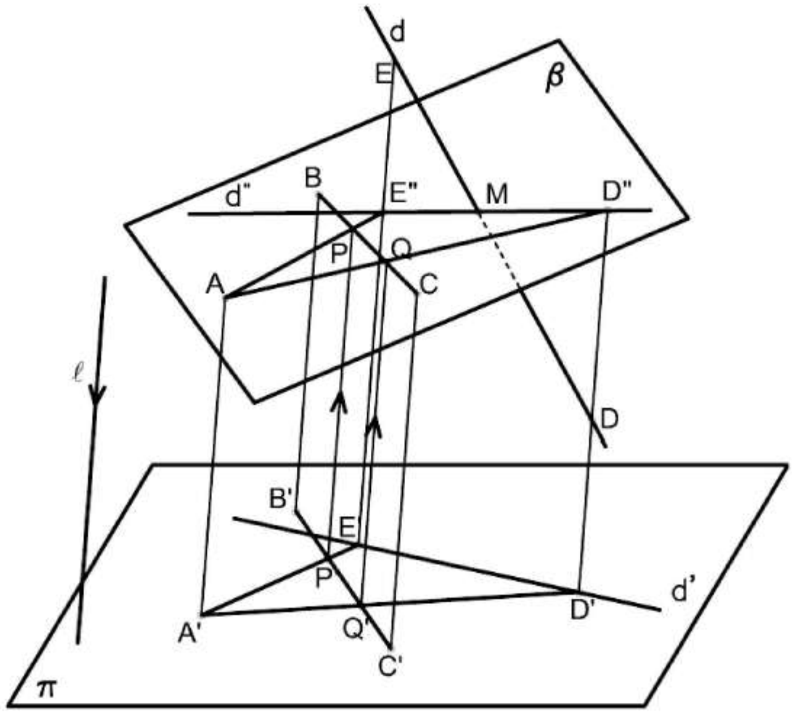
<u>الحالة 1:</u> إذا كان $l \parallel \beta$ و $l \parallel d$ عندها تكون النقاط A و B و C تقع على مستقيم التقاطع b الكائن ما بين المستويين β و π، وعندها يكون $D' = E'$. إذا كانت النقطة D' تقع على المستقيم b فإن المستقيم d يقع في المستوي β. إذا كانت النقطة D' لا تقع على المستقيم b فإن المستقيم d يوازي المستوي β، وبالتالي $d \cap \beta = \emptyset$.

<u>الحالة 2:</u> إذا كان $l \parallel \beta$ و $l \nparallel d$ عندها $d' = (D'E')$ وهو عبارة عن مسقط المستقيم d. إذا كان $b \parallel d'$ عندئذ فإن $d \parallel \beta$. إذا كان $b \nparallel d'$ عندئذ فإن النقطة M' ستكون نقطة تقاطع المستقيم d' مع *المستوي* β. نرسم المستقيم l_M الموازي لشعاع الإسقاط l والمار من النقطة M' على اعتبار أن النقطة M هي نقطة تقاطع l_M مع المستقيم d، كما هو مبين في الشكل (7).



الشكل (7)

<u>الحالة 3:</u> إذا كان $l \nparallel \beta$ و $l \nparallel d$ هنا سوف نستخدم طريقة الحل الواردة في المسألة 3 السابقة وسنوجد النقطة D'' والتي هي نقطة تقاطع شعاع الإسقاط $l_D = (D'D)$ مع المستوي β. وسنوجد النقطة E'' والتي هي نقطة تقاطع شعاع الإسقاط $l_E = (E'E)$ مع المستوي β. إن المستقيم $d'' = (D''E'')$ هو مسقط المستقيم d على المستوي β. وهكذا فإن نقطة التقاطع M الكائنة ما بين المستقيمين d و d'' هي نقطة تقاطع المستوي β مع المستقيم d، كما هو مبين في الشكل (8).



الشكل (8)

طرق إنشاء المقاطع المستوية في الأجسام الموشورية

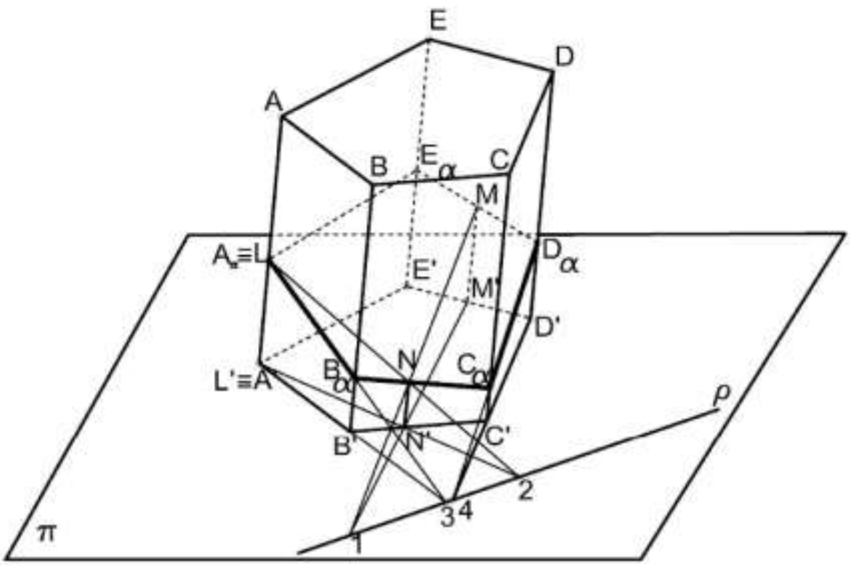
إن طريقة الحل الواردة في المسألتين 2 و 3 ضروريتان لإيجاد المقاطع المستوية للأجسام الهندسية الفراغية الموشورية، حيث تمكننا المسألة 2 من إيجاد المقطع المستوي ومن ثم إيجاد محيط هذا المقطع، إلا أن هذه الطريقة لا يمكن استخدامها في كافة الحالات حيث تصادفنا بعض المسائل التي لا نستطيع فيها إيجاد الآثار. أما الطريقة الواردة في المسألة 3 فهي تشكل أساساً لما يعرف بطريقة أشعة الإسقاط وهي قابلة للتطبيق في كافة الحالات والسلبية الوحيدة التي تضمنها هذه الطريقة هي ضرورة رسم عدد كبير من أشعة الإسقاط على لوحة الرسم.

المسألة: لنفرض أن النقاط $ABCDE\ A'B'C'D'E'$ تعرف الموشور المدروس ولنفرض أن النقاط M و N و L هي نقاط تقع على أوجه جانبية لهذا الموشور ومساقطها هي النقاط M' و N' و l' على مستوي القاعدة $A'B'C'D'E'$. المطلوب رسم المقطع

الناتج عن قطع الموشور بالمستوي β المار عبر النقاط الثلاث آنفة الذكر M و N و L.

<u>الحل:</u> سوف نعتبر مستوي القاعدة $A'B'C'D'E'$ هو مستوي الإسقاط π وأن شعاع الإسقاط هو الشعاع المحدد بحرف الموشور الجانبي (AA').

<u>الحالة 1:</u> يقع أثر المستوي β ضمن حدود لوحة الرسم، ويبين الشكل (9) الحل في هذه الحالة.



الشكل (9)

<u>الحالة 2:</u> يقع أثر المستوي β خارج حدود لوحة الرسم، كما هو مبين في الشكل (10)، ولإنجاز الحل يجب إيجاد نقطتي التقاطع C_α و D_α الكائنتين ما بين المستوي β من جهة والمستقيمين (CC') و (DD') من جهة ثانية وعلى الترتيب. يمكن تلخيص خطوات الحل بالخطوات الخمس التالية:

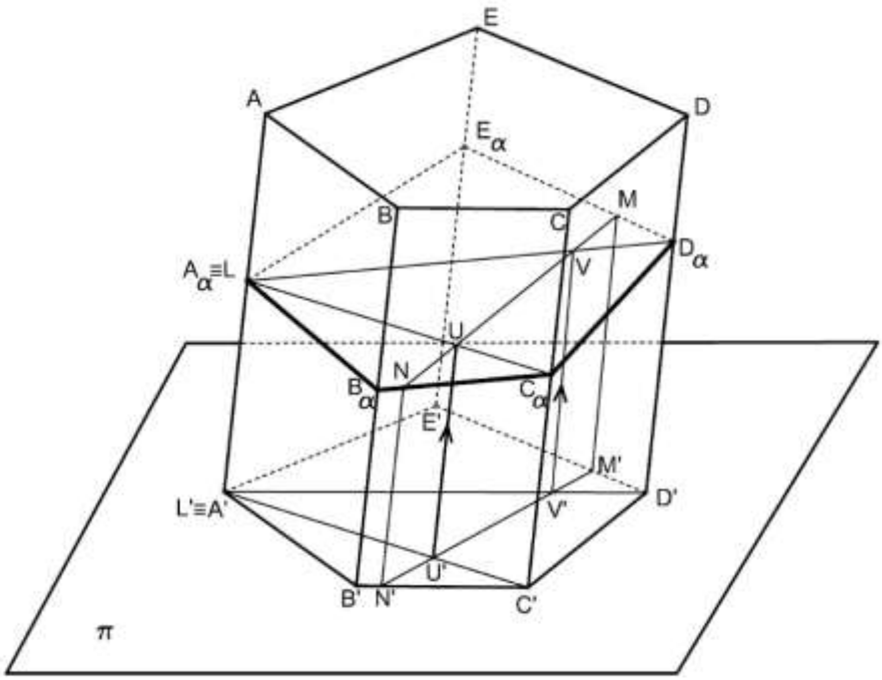
١- نوجد النقطتين U' و V' حيث $U' = (L'C') \cap (N'M')$ و $V' = (L'D') \cap (N'M')$.

٢- نرسم شعاعي الإسقاط l_u و l_v المارين عبر النقطتين U' و V' على الترتيب والموازيين للحرف (AA') ونوجد تقاطعهما مع المستقيم (MN).

٣- نوجد النقطتين C_α و D_α حيث $C_\alpha = (LU) \cap (CC')$
و $D_\alpha = (LV) \cap (DD')$.

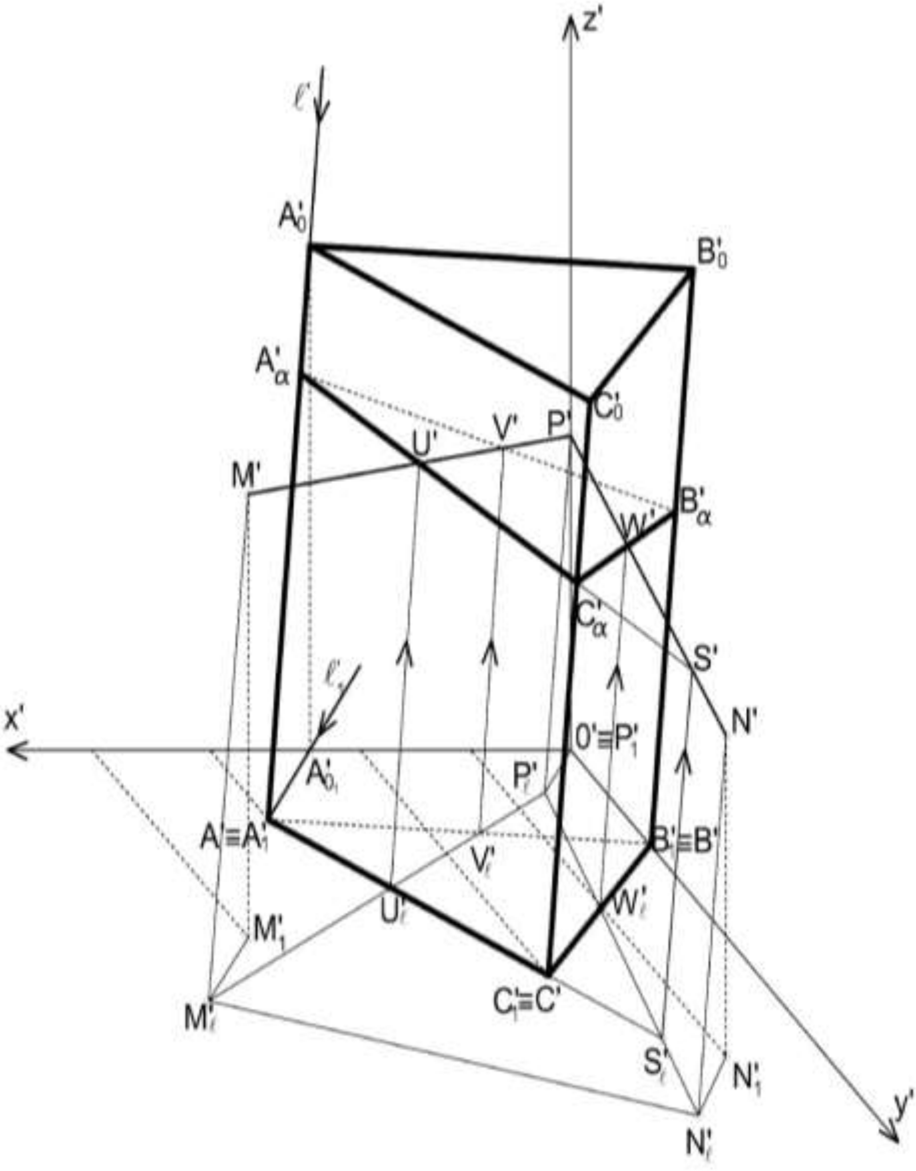
٤- نوجد النقطتين E_α و B_α حيث $E_\alpha = (D_\alpha M) \cap (EE')$
و $B_\alpha = (C_\alpha N) \cap (BB')$.

٥- إن المقطع الناتج $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha E_\alpha$ هو المقطع المطلوب.



الشكل (10)

<u>مثال عددي أول</u>: المطلوب رسم موشور قاعدته المثلث ABC في إسقاط كافالبير، حيث $A(70,15,0)$ و $B(0,20,0)$ و $C(40,50,0)$، إذا علمنا أن النقطة $A_0(50,0,80)$ هي الرأس المقابل للرأس A في القاعدة الأخرى، ثم ارسم المقطع المستوي لهذا الموشور الناتج عن قطعه بالمستوي α المار عبر النقاط $M(90,40,70)$ و $N(20,70,50)$ و $P(0,0,50)$، كما هو موضح في الشكل (11).

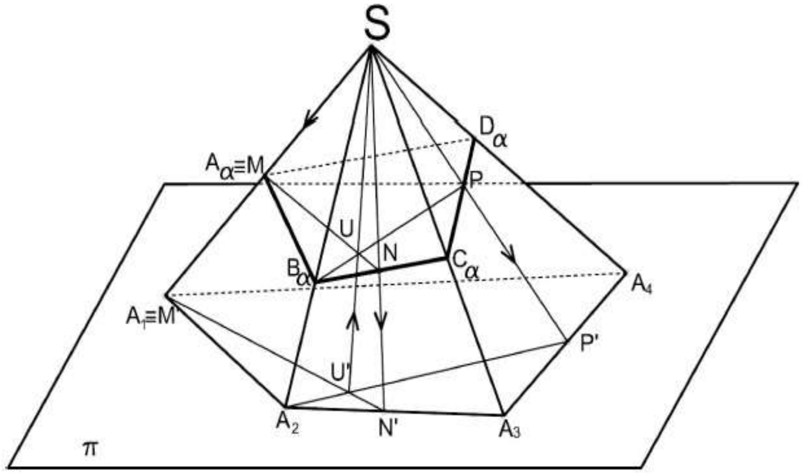


الشكل (11)

لحل هذه المسألة نوجد المساقط M'_l و N'_l و P'_l وهي مساقط النقاط M و N و P بالترتيب على المستوي μ وفق شعاع الإسقاط $l = (AA_0)$. يمكن حل هذه المسألة باعتماد طريقة الحل الواردة في المسألة 4، كما هو مبين في الشكل (11).

طرق إنشاء المقاطع المستوية في الأجسام الهرمية

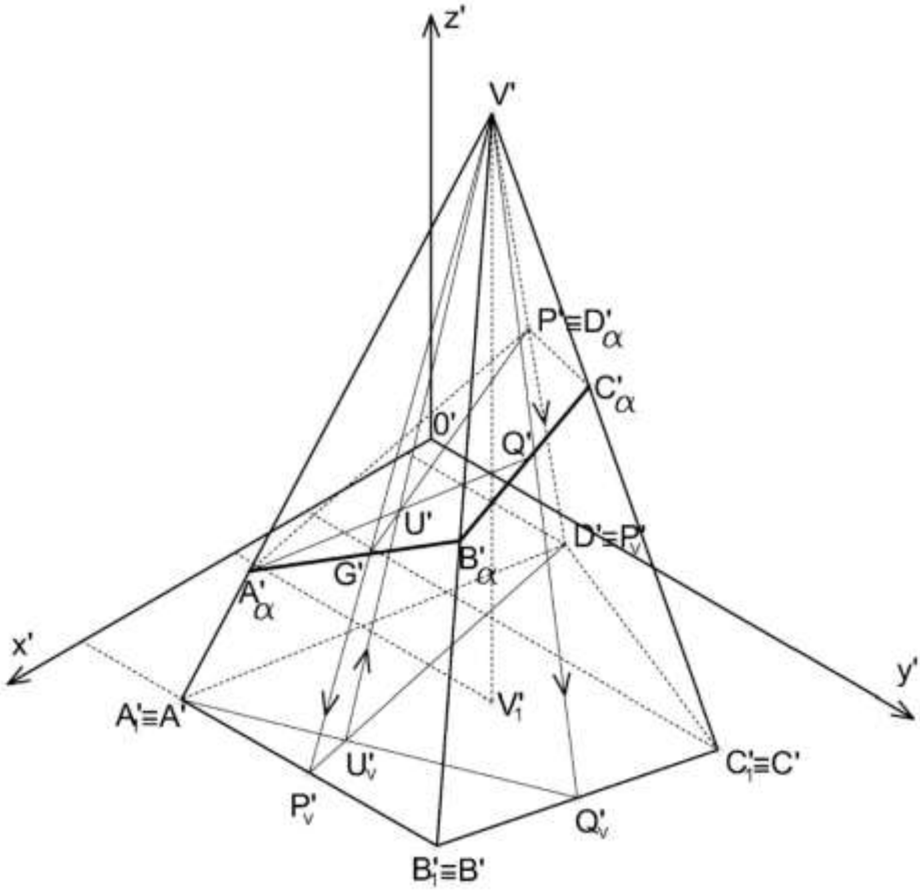
سوف نستخدم الإسقاط المركزي لإيجاد المقاطع المستوية في الأجسام لهرمية وهنا فإن أشعة الإسقاط تمر كلها عبر مركز الإسقاط S، وهو نفسه رأس الهرم. لنفرض أن $SA_1A_2A_3 \dots A_n$ عبرة عن هرم مدروس رأسه S وقاعدته هي مستوي الإسقاط. يبين الشكل (12) حل هذه المسألة بطريقة مشابهة تماماً لحل مسألة الموشور السابقة.



الشكل (12)

<u>مثال عددي ثانٍ:</u> المطلوب رسم هرم رأسه $V(40,50,100)$ وقاعدته محددة بالنقاط $A(70,20,0)$ و $B(70,70,0)$ و $C(25,80,0)$ و $D(5,30,0)$، ولنفرض أن المستوي القاطع هو المستوي α المار عبر نقطة المنتصف P للمستقيم VD والنقطة G مركز ثقل المثلث ABV والنقطة Q نقطة منتصف منصف الضلع BC من المثلث BCV، كما هو مبين في الشكل (13).

لحل هذه المسألة سوف نعتبر أن V هو مركز الإسقاط المركزي، ويبين الشكل (13) خطوات الحل اللامة للحصول على المقطع المطلوب.



الشكل (13)

النتائج

تمكّنا من يجاد طريقة عامة وقابلة للتطبيق العملي بسهولة لإيجاد المقاطع المستوية في الأجسام الهندسية الفراغية، حيث تعتبر مسائل القطاعات من المسائل الصعبة نسبياً في الهندسة الوصفية. لقد قمنا بدراسة النوعين الأكثر شيوعاً للأجسام الهندسية الفراغية وهما الأجسام الموشورية والأجسام الهرمية.

يكمن الاختلاف الجوهري بين هذه الطريقة الجديدة والطريقة المعروفة سابقاً في أننا في هذه الطريقة اعتمدنا على تمثيل أثر التقاطع على مستوي الإسقاط على خلاف ما هو مستخدم سابقاً في تمثيل أثر المستوي القاطع على الجسم المقطوع.

إن ما يميز هذا البحث هو شموله لعدة أنواع من الإسقاط، حيث تضمنت المسائل والأمثلة العددية الإسقاط المتوازي بحالته العامة و الإسقاط المركزي بالإضافة للإسقاط الإكسونومتري وفق طريقة كافالبير، حيث بينت كافة المسائل والأمثلة صحة الطريقة مهما كان نوع الإسقاط المستخدم.

إن الطريقة العامة التي أوجدها هذا البحث مفيدة لكافة المهتمين في مجال الهندسة الوصفية، كما أنها تساهم في تحسين فهمنا للفراغ وتصورنا للمقاطع المستوية في الأجسام الهندسية، وهي تسهل دراسة مسائل التقاطعات والقياسات المعقدة.

Constructing Plane Sections In Prismatic And Pyramidal Spatial Geometrical Bodies

Abstract

The problem of finding the plane sections is considered one of the complicated and important problems in descriptive geometry. In this paper we will find a universal method which enables us to find the plane sections in prismatic and pyramidal geometrical spatial bodies at the basis of representing both the studied body and the cutting plane and determining the spatial logical relations in between them. We will clarify that this method can be applied in spite of the kind of used projection via studying several problems and two numerical examples.