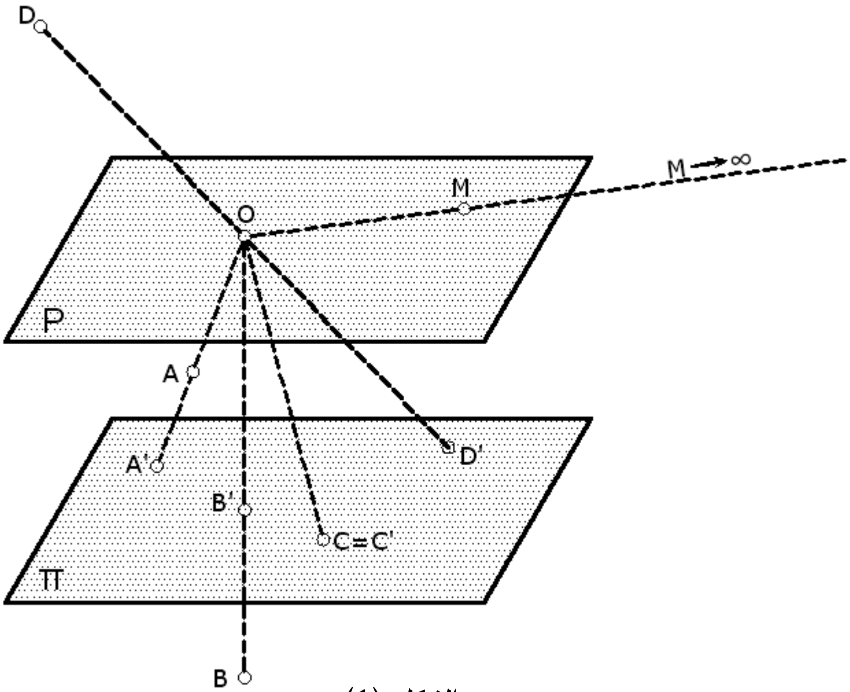
دراسة تغيير جملة المحاور الأساسية في الإسقاط الإكسونومتري المركزي

أولاً: مقدمة

إذا أنشأنا المساقط المركزية لجميع النقاط التي تؤلف جسماً فراغياً نحصل على المسقط المركزي للجسم، فجميع نقاط الفراغ لها مساقط معينة، كما هو مبين في الشكل (1)، ما عدا النقاط التي تقع في مستوٍ مار بمركز الإسقاط وموازٍ لمستوي الإسقاط، كالنقطة M. هذه النقاط ليس لها مساقط على بعدٍ منتهٍ، والنقطة O مسقطها غير محدد.

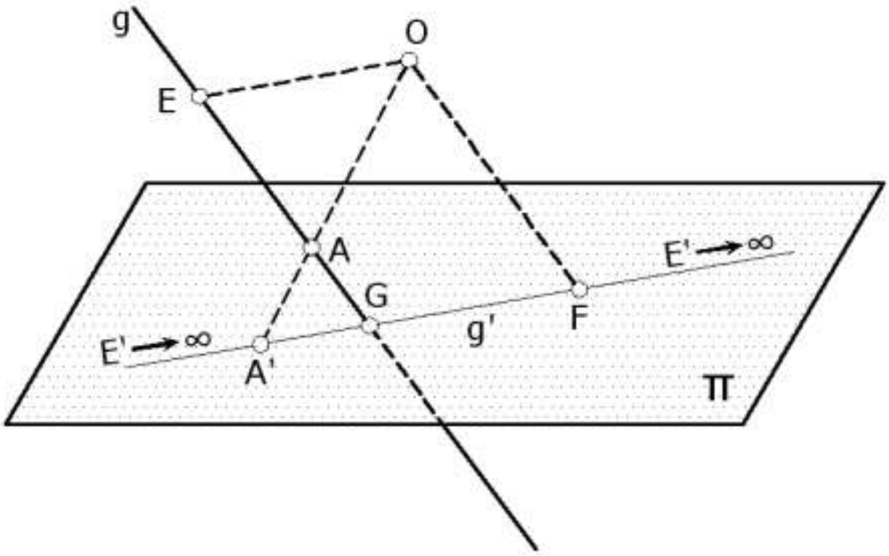


الشكل (1)

لتكن لدينا النقطة A الواقعة على المستقيم g ، عندها يكون المستقيم OA يقطع مستوي الإسقاط π في النقطة A' والتي هي مسقط النقطة A ، كما هو موضح بالشكل (2).

إن لمستقيمات المسقطة مثل OA لجميع نقاط المستقيم تقع في مستوٍ هو المستوي المسقط للمستقيم. هذا المستوي يقطع مستوي الإسقاط في المستقيم g' الذي هو مسقط المستقيم g .إذا تحركت النقطة A على المستقيم g فإن A' سوف تتحرك على المستقيم 'g، فكل نقطة من g تقابلها نقطة من g' والعكس بالعكس.

إذا وقعت A في E بحيث يكون OE موازياً لمستوي الإسقاط، فإن المسقط E' ينتقل إلى اللانهاية. وسواءً اقتربت A من E من إحدى الجهتين أو من الجهة الأخرى، فإن E'سوف تنتقل إلى اللانهاية. بذا يمكن القول أنه توجد على g' نقطة واحدة في اللانهاية هي مسقط E.



الشكل (2)

إذا ابتعدت A على المستقيم g إلى اللانهاية في أي من الجهتين، فإن المستقيم المسقط يصبح موازياً للمستقيم g ويقطع مستوي الإسقاط في النقطة F التي يمكن اعتبارها مسقطاً للنقطة في اللانهاية على المستقيم g. النقطة F تسمى مركز الإسقاط لمستقيم g.

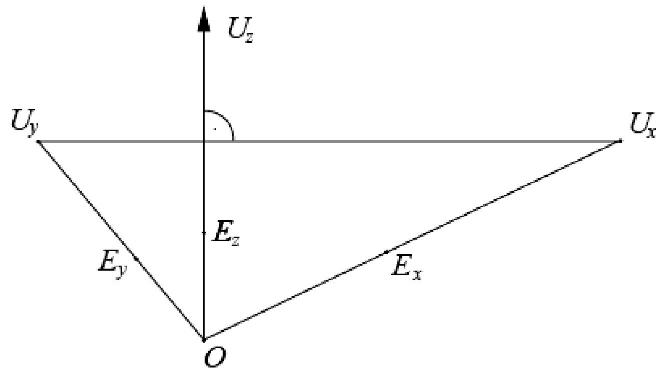
في الإسقاط الإكسونومتري، والذي هو إسقاط متوازي نمثل الجسم في وضع تكون فيه الاتجاهات الرئيسية للمستقيمات والمستويات الموجودة في الجسم في وضع عام بالنسبة لمستوي الإسقاط وبالنسبة لاتجاه الإسقاط. هذا النوع من الإسقاط يمثل حلاً وسطاً بين الإسقاط المركزي والإسقاط العمودي (طريقة مونج)، فهو يجمع بين قدر كافٍ من سهولة التمثيل وأخذ القياسات ومن سهولة التصور.

يوجد في أغلب الأجسام الهندسية ثلاثة اتجاهات رئيسية متعامدة مع بعضها، وفي الأجسام التي لا توجد فيها مثل هذه الاتجاهات يمكن تثبيت اتجاهات من هذا النوع. نأخذ ثلاثية إحداثيات ذات محاور موازية للاتجاهات المذكورة ونعين نقاط الجسم المختلفة بواسطة إحداثياتها المنسوبة إلى هذه المحاور.

سندرس في هذا البحث الشروط التي يمكن بواسطتها اعتبار المسقط الإكسونومتري لجسم ما هو مسقط مركزي لهذا الجسم، وتحديد مواصفات جملة الإسقاط الأساسية المركزية والتي من خلالها يكون تحريك نقطة أساسية أو أكثر من هذه الجملة يبقي الجملة الإكسونومترية جملة إسقاط مركزية. وإذا أعطي أحد أقسام الجملة الأساسية فقط، فكيف يتم اختيار باقي نقاط الجملة بحيث تكون الجملة هي جملة إسقاط مركزية.

ثانياً: تحديد مواصفات الجملة المركزية

تلعب الإكسونومترية المركزية دوراً هاماً في الهندسة الوصفية والرسم بواسطة الحاسب. يمكن تعريف التمثيل بواسطة الإكسونومترية المركزية لفراغ على مستوي إسقاط π كما يلي: لنفرض نقطة ما تقع في المستوي πوهي عبارة عن مسقط مبدأ الإحداثيات في الفراغ، كما في الشكل (٣). هناك ثلاث مستقيمات X ، Y ، Z تمر من النقطة O وتقع في المستوي π وهي عبارة عن المساقط الثلاث لجملة المحاور الإحداثية الديكارتية الفراغية.



الشكل (3)

بالإضافة لذلك، نفرض أن هناك نقطتين تقعان على كل محور من المحاور الثلاث وهما:

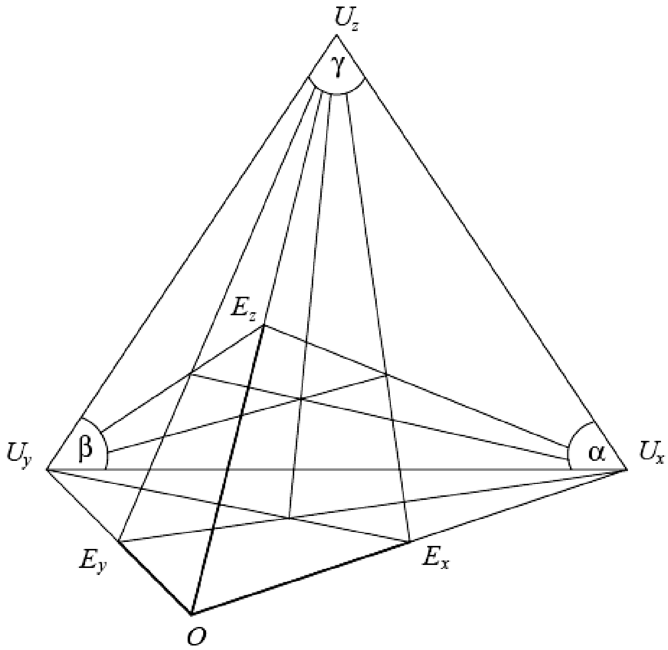
النقطتين E_X و U_X على المحور X

النقطتين E_Y و U_Y على المحور Y

النقطتين E_Z و U_Z على المحور Z

وهي عبارة عن مساقط النقاط الواحدية ونقاط التلاشي على المحاور الفراغية كل حسب محوره، كما هو مبين في الشكل (4).

يتم الحصول على مساقط نقطة فراغية $P(P_X, P_Y, P_Z)$ عن طريق إسقاط النسب الإسقاطية على المحاور. وهذا يعني أن الإحداثي $i(P_i)$ للنقطة P على أي محور i يساوي نسبة التقاطع $P_i = (P_i, E_i, OU_i)$، حيث P_i هي لمسقط القائم للنقطة P على المحور i.



الشكل (4)

تشكل النقاط السبع $O, E_X, E_Y, E_Z, U_X, U_Y, U_Z$ الجملة المرجعية التي سندعوها بالجملة الأساسية للإكسونومترية المركزية.

وبالتالي ما هي الشروط التي يمكن اعتبار المسقط الإكسونومتري المركزي لجسم ما هو مسقط مركزي لهذا الجسم، وبتعبير آخر ما هي الطريقة التي بواسطتها يتم تحديد مواصفات جملة الإسقاط المركزية. Kruppa [1] أعطى إجابة معقدة نسبياً على هذا السؤال والنتائج التي حصل عليها لا يمكن استخدامها في مجال الرسم بواسطة الحاسب. أما Stiefel [2] فقد حصل على نتائج تحليلية إلا أنها تصلح لمسألة محددة (النظرية رقم 1)، في حين أن Szabo [3] أوجد النظرية العامة (النظرية 2) وهي طريقة تحليلية بسيطة.

النظريات الأساسية

نظرية Stiefel

إذا كانت نقطة التلاشي U_Z من الجملة الإكسونومترية المركزية $O, E_X, E_Y, E_Z, U_X, U_Y, U_Z$ تقع في اللانهاية، والمستقيم OUZ عمودي على المستقيم الواصل بين نقطتي التلاشي U_Y و U_X الواقعتين على المحورين Y و X على الترتيب، عندها فإن المسقط الإكسونومتري المركزي هو مسقط مركزي فقط وفقط إذا حققت المسافات العلاقة التالية، كما هو مبين في الشكل (3).

$$\left(\frac{E_x U_x}{OE_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y U_y}{OE_y}\right)^2 = \left(\frac{U_x U_y}{OE_x}\right)^2 \qquad ...(1)$$

نظرية Szabo-Stachel-Vogel

عندما تقع جميع النقاط $O, E_X, E_Y, E_Z, U_X, U_Y, U_Z$ من جملة المحاور الإحداثية الأساسية الإكسونومترية في اللانهاية، فإن المسقط الإكسونومتري المركزي هو مسقط مركزي فقط وفقط إذا تحققت العلاقة التالية، كما هو مبين في الشكل (4):

$$\left(\frac{OE_x}{E_x U_x}\right)^2 : \left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2 : \left(\frac{OE_z}{E_z U_z}\right)^2 = \tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma \qquad ...(2)$$

حيث

$$\alpha = \angle U_z U_x U_y$$
$$\beta = \angle U_x U_y U_z$$
$$\gamma = \angle U_y U_z U_x$$

سنبرهن أن نظرية Szabo-Stachel-Vogel تتضمن نظرية Stiefel على اعتبار أنها حالة حدية، لذلك سنورد المسلمة التالية:

عندما ينتقل الرأس C من المثلث ABC إلى اللانهاية على طول العمود المرسوم من C عندها يكون

$$\lim_{C \to \infty} m_c \sin\gamma = c$$

كما هو مبين في الشكل (5).

وانطلاقاً من مساحة المثلث ABC المبين في الشكل (3) فإن

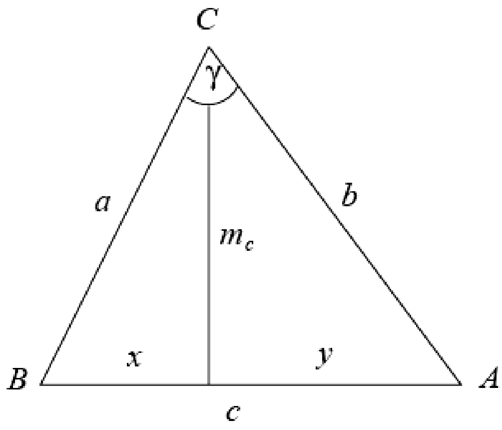
$$ab \sin\gamma = m_c c$$

أو يمكن أن نكتب:

$$ab \sin\gamma = c\,\frac{m_c^2}{ab}$$

باستخدام هذه المعادلة وعلى اعتبار أنه عندما تسعى C إلى اللانهاية فإن m_C تسعى إلى اللانهاية، ونحصل على العلاقة التالية:

$$\lim_{C\to\infty} m_c \sin\gamma = \lim_{C\to\infty} c\frac{m_c^2}{ab} = c\lim_{C\to\infty}\frac{m_c^2}{ab} = c\lim_{C\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{m_c^2+x^2}}{m_c}\,\dfrac{\sqrt{m_c^2+y^2}}{m_c}} = c\cdot 1 = c$$



الشكل (5)

حيث X و Y المبينتين في الشكل (5) تشيران إلى طول القطعتين BC و AC على الترتيب.

من العلاقة (2) نكتب:

$$\cot\alpha = \left(\frac{E_xU_x}{OE_x}\right)^2\left(\frac{OE_z}{E_zU_z}\right)^2\cot\gamma$$

$$\cot\beta = \left(\frac{E_yU_y}{OE_y}\right)^2\left(\frac{OE_z}{E_zU_z}\right)^2\cot\gamma$$

وبالجمع نجد:

$$\cot\alpha + \cot\beta = \left[\left(\frac{E_xU_x}{OE_x}\right)^2 + \left(\frac{E_yU_y}{OE_y}\right)^2\right]\left(\frac{OE_z}{E_zU_z}\right)^2\cot\gamma \qquad ...(3)$$

بالمقابل لنفرض أن الحالة العامة لجملة المحاور الإحداثية الفراغية توافق الحالة التي فرضها Stiefel حيث يكون المحور Z معامداً للمستقيم U_XU_Y ، إلا أن النقطة U_Z ستقع في اللانهاية كما يبين الشكل (6) والنقطة T وهي نقطة تقاطع المحور Z مع المستقيم U_XU_Y تحقق العلاقتين التاليتين:

$$\cot\alpha = \frac{U_x T}{U_z T}$$

$$\cot\beta = \frac{U_y T}{U_z T}$$

وبالتالي فإن

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{U_x U_y}{U_z T}$$

إن الطرف اليميني من هذه العلاقة يساوي الطرف اليميني من العلاقة (3)، أي

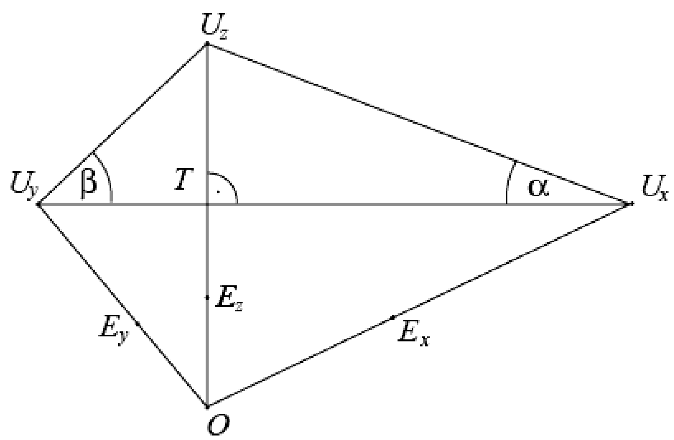
$$\frac{U_x U_y}{U_z T} = \left[\left(\frac{E_x U_x}{OE_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y U_y}{OE_y}\right)^2\right]\left(\frac{OE_z}{E_z U_z}\right)^2 \cot\gamma$$

بضرب طرفي المعادلة بالمقدار

$$\frac{U_x U_y \cdot U_z T}{OE_z^{\ 2}}$$

نحصل على العلاقة التالية

$$\left(\frac{U_x U_y}{OE_z}\right)^2 = \left[\left(\frac{E_x U_x}{OE_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y U_y}{OE_y}\right)^2\right]\frac{U_x U_y \cdot U_z T \cdot \cos\gamma}{E_z U_z^{\ 2} \cdot \sin\gamma}$$



الشكل (6)

نلاحظ أن هذه المعادلة الأخيرة وهي نفس العلاقة (1) باستثناء المعامل الأخير في الطرف اليميني وطالما نه يكفي أن نبرهن إذا سعت النقطة U_Z إلى اللانهاية على طول المحور Z فإن قيمة المعامل تسعى إلى 1، أي

$$\lim_{U_z \to \infty} \frac{U_x U_y \cdot U_z T \cdot \cos\gamma}{E_z U_z{}^2 \cdot \sin\gamma} = 1$$

من الشكل (6) نلاحظ أن

$$E_z U_z = U_z T \pm TE_z$$

وبالتالي يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$\frac{U_z T}{E_z U_z} \cdot \frac{U_x U_y \cdot \cos\gamma}{U_z T \cdot \sin\gamma \pm TE_z \cdot \sin\gamma}$$

ومن أجل كمال عملية السعي إلى اللانهاية سنحلل الحالة إلى أربعة أجزاء:

١- $\lim\limits_{U \to \infty} \frac{U_z T}{E_z U_Z} = 1$ وذلك طالما أن $E_z U_z = U_z T \pm TE_z$ وأن المقدار TE_Z هو مقدار ثابت.

٢- $\lim\limits_{U \to \infty} U_x U_y \cdot \cos\gamma = U_x U_y$ وذلك طالما أن $\lim\limits_{U \to \infty} \gamma = 0$.

٣- $\lim\limits_{U \to \infty} TE_z \cdot \sin\gamma = 0$

٤- $\lim\limits_{U \to \infty} TE_z \cdot \sin\gamma = U_x U_y$ وذلك وفقاً للمسلمة التي تم ذكرها سابقاً.

وبالمحصلة فإن الحالات الأربع السابقة تقودنا إلى:

$$\lim_{U \to \infty} \frac{U_x U_y \cdot U_z T \cdot \cos\gamma}{E_z U_z{}^2 \cdot \sin\gamma} = \frac{U_x U_y}{U_x U_y} = 1$$

مقدمة

إن الهندسة الوصفية تستخدم الإكسونومترية المركزية والإسقاط المركزي لتمثيل الفراغ P^3 على مستوي الاسقاط P^2. إذا كان لدينا جملة ديكارتية في P^3 مبدؤها O ونقاط واحدية على المحاور هي E_1 و E_2 و E_3 ونقاط في اللانهاية تقع على المحاور الثلاثة وهي U_1 و U_2 و U_3. عندها يمكن اعتبار الإكسونومترية المركزية هي تحويل موفق خطياً على مستوي الإسقاط P^2 ومعرف بالجملة الإكسونومترية المركزية الأساسية التي يمكن أن تعرف كما يلي:

$$(O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z) \subset P^2$$

إن الإسقاط المركزي هو طريقة لتمثيل الأجسام الهندسية، حيث يتم إسقاط الجملة الديكارتية من الفراغ إلى المستوي، فالإسقاط المركزي يمثل جملة جزئية من الجملة الإكسونومترية المركزية وهذا يؤدي إلى مجموعة من المسائل الأساسية في هذا المجال وهو كيف يمكننا تحديد خواص الإسقاط المركزي انطلاقاً من الإكسونومترية المركزية. أول من أعطى نتائج أولية لهذه الحالة كان Kruppa [1]، ومن بعده Stiefel [2] الذي أعطى حلاً جبرياً لحالة محددة، وفي المحلة الأخيرة ظهرت العديد من الأبحاث المتعلقة بهذه المسألة المتضمنة لبعض الحلول الجبرية الخاصة بمسائل محددة [3,4,5]. هناك حل محدد للشرط الأول وارد في [6] وتم تطبيقه هندسياً [7,8]. في هذا البحث سوف نبحث في شروط Szabo-Stachel-Vogel [3].

نرمز للمسافة $O_C U_{iC}$ بالرمز e_i وسنرمز للمسافة $E_{iC} U_{iC}$ بالرمز f_i، حيث مع اعتبار $i = 1,2,3$

$$\alpha_1 = \angle U_3^c U_1^c U_2^c$$
$$\alpha_2 = \angle U_1^c U_2^c U_3^c$$
$$\alpha_3 = \angle U_2^c U_3^c U_1^c$$

يمكن صياغة هذا الشرط كالتالي:

$$\left(\frac{e_1}{f_1}\right)^2 : \left(\frac{e_2}{f_2}\right)^2 : \left(\frac{e_3}{f_3}\right)^2 = \tan \alpha_1 : \tan \alpha_2 : \tan \alpha_3 \qquad ...(1)$$

في هذا البحث وكما في شروط Szabo-Stachel-Vogel سنفرض أن جميع النقاط في الجملة تقع في اللانهاية وسوف نستخدم الشروط الإقليدية في بحثنا وبالتالي يمكن اعتبار إن مستوي الشكل هو مستوي إقليدي وسنستخدم الرمز P^2 لهذه الغاية. سنرمز للجملة الفراغية بالرمز (w_x, w_y, w_z, w).

إذا كـا لـدينا جملـة إكسـونومترية مركزيـة $(O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z) \subset P^2$.
هناك عدة طرق لتحديد خواص هذه الجملة كجملة إسقاط مركزية. سنغفل ذكر اللاحقة العلوية c على اعتبار أننا سندرس النقاط المستوية. سنبرهن أن هذه الجملة تحقق اشتراطات الجملة المركزية الرئيسية للإسقاط. ليكن لدينا جملة إكسونومترية مركزية عامة وقمنا بتحريك أية نقط من النقاط الأساسية مع الحفاظ على الثلاثية (O, E_i, U_i) الواقعة على مستقيم واحد، فإن الجملة الجديدة سوف تكون أيضاً جملة إكسونومترية مركزية، إلا أنه إذا كانت الجملة الإكسونومترية المركزية الأصلية هي حملة مركزية للإسقاط فبعد القيام بعملية التحريك السابقة، فإن الجملة الجديدة لن تمتلك هذه الخاصية، وبتعبير آخر إن الجملة الجديدة ستكون جملة إكسونومترية دون أن تكون جملة إسقاط مركزي. وكمثال بسيط على ذلك: إذا أخذنا جملة تحقق شروط Szabo-Stachel-Vogel وبتحريك النقطة E_1 على طول المحور X نلاحظ بأن كافة النسب تبقى ثابتة عدا النسبة الأولى الواردة في المعادلة الأولى. إن غايتنا هي تحديد الشروط الهندسية والتي من خلالها يكون تحريك نقطة أساسية أو أكثر تجعل من جملة الإسقاط المركزية تتحول إلى جملة من نفس النوع. من وجهة نظر أخرى إذا أعطي أحد أقسام الجملة الأساسية فقط فكيف يمكن اختيار باقي نقاط الجملة بحيث تكون الجملة هي جملة إسقاط مركزية.

وهنا سنبحث في تحريك النقاط الواحدية وفي الشروط النى تجعل الجملة الإكسونومترية جملة إسقاط مركزي. ما هو الشرط الهندسي الضروري والكافي من أجل عاتبار الحملة الإكسونومترية المركزية هـ جملة إسقاط مركزية.

هنالك العديد من الشروط المعروفة من أجل حل هذا السؤال وجميع هذه الشروط هي شروط تحليلية ما عدا الشرط الذي أوجده Kruppa. هذا يعني أنه لاعتبار جملة إكسونومترية مركزية هي جملة إسقاط مركزي فإنه علينا قياس الأطول والزوايا عن طريق عمليات إنشائية بسيطة [9].

مسلمة

إذا كان المثلث ABC ذو زوايا حادة وأخذنا نقطة داخلية P آثارها T_a, T_b, T_c سوف نوجد النقطة R_a التي تقع على الضلع BC بحيث تحقق العلاقة

$$\frac{R_a B}{C R_a} = \sqrt{\frac{T_a B}{C T_a}} \qquad ...(2)$$

إذا قمنا بتحديد النقطتين R_b و R_c على الضلعين AB و AC فإن المستقيمات AR_a و BR_b و CR_c جميعها تمر من النقطة R_P.

هنا افترضنا R_a و R_b و R_c هي واقعة على أحرف المثلث المفروض. إن المعادلة (2) تؤدي إلى حل آخر من أجل النقاط السابقة والواقعة على المستقيمات AB و AC و BC على الترتيب.

في هذا البحث سنأخذ بعين الاعتبار الحلول الموافقة للجذور الموجبة في المعادلة (2)، وهذا الأمر ضروري من أجل التعريف التالي:

تعريف

إن النقطة المشتركة R_P هي الجذر التربيعي للنقطة P وسوف نفرض أن الجملة الأساسية هي جملة إسقاط مركزية، والمثلث $U_1U_2U_3$ هو مثلث ذو زوايا حادة وسنفرض أن H هي المركز العمودي لهذا المثلث. من المثلث OU_1U_2 وبالاعتماد على المعادلة (1) نكتب:

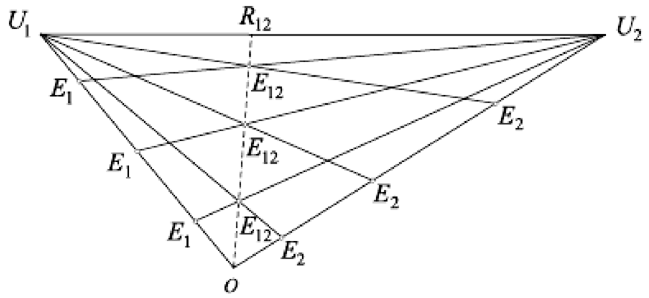
$$\frac{\left(\dfrac{e_1}{f_1}\right)^2}{\left(\dfrac{e_2}{f_2}\right)^2} = \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}$$

إذا رمزنا لأثر النقط H على المستقيم U_1U_2 بالرمز T_{12} فإنه بالإمكان إعادة صياغة الطرف اليميني من العلاقة كالتالي:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{T_{12}U_2}{U_1T_{12}}$$

إن النقطة R_{12} الواقعة على المستقيم U_1U_2 تحقق العلاقة

$$\frac{R_{12}U_2}{U_1R_{12}} = \sqrt{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}}$$

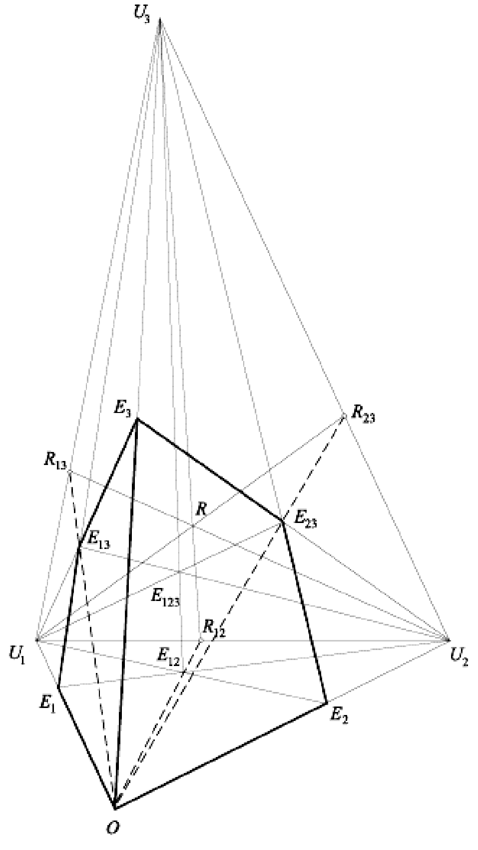


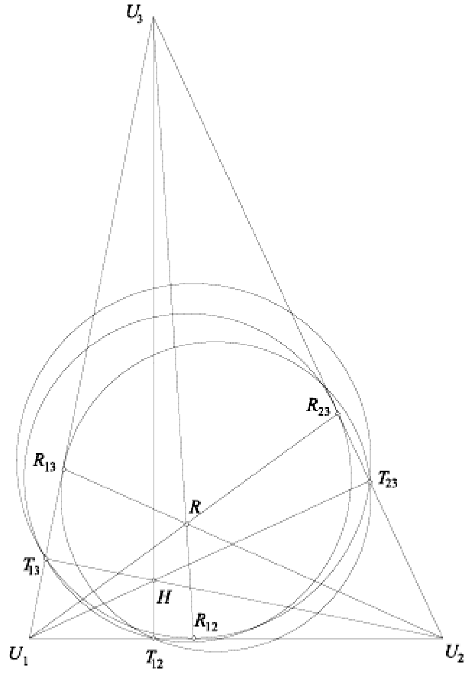
الشكل (1)

إذا كانـت النقطـة E_{12} هي النقطـة المتعلقـة بالنقطـة الفراغيـة $(1,1,0,1)$ يمكننـا ملاحظـة إن موقـع المستقيم OE_{12}مستقل عن موقـع النقطتين E_1و E_2 وهذا لمستقيم يقطـع المستقيم U_1U_2 في النقطة R_{12} كما هو مبين في الشكل (1).

بشــكل مماثــل نوجــد النقطتــين R_{13} و R_{23} الــواقعتين علــى المســتقيمين U_1U_3 و U_2U_3علـى الترتيـب. إن التعريـف السـابق يـؤدي مباشـرة إلـى أن المسـتقيمات الـثلاث U_1R_{23} و U_1R_{13} و U_1R_{12} هي جميعها تمر من نقطـة واحدة هي R والتـي هي الجـذر التربيعـي للمركز العمودي H والخاص بالمثلث $U_1U_2U_3$.

إضــافة إلــى مــا ســبق، إذا كانــت E_{123} هــي النقطــة المتعلقــة بالنقطــة الفراغيــة $(1,1,1,1)$ وبالتـالي فـإن المسـتقيم OE_{123} يمـر مـن النقطـة R والتـي هـي مسـقط النقطـة الفراغيـة فـي اللانهايـة $(1,1,1,0)$. أخيراً نحصل على الشرط التالي كما هو مبين في الشكل (2):





الشكل (2)

الحالة الأولى

إن الجملة الإكسونومترية المركزية الأساسية العامة $(O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z)$ الواقعة في مستوي الإسقاط P^2 والتي فيها النقطة الواحدة E_{123} هي جملة إسقاط مركزية إذا مر المستقيم OE_{123} من الجذر التربيعي للمركز العمودي للمثلث $U_1U_2U_3$.

نفرض أن المثلث ABC مثلث ذو زوايا حادة وإن H_a و H_b و H_c هي آثار المركز العمودي H. إن هناك دائرة واحدة تمر من H_a و H_b وتمس الحرف AB وتكون نقطة التماس نقطة داخلية واقعة على الحرف AB. سنرمز لنقطة التماس السابقة بالرمز R_c. بشكل مشابه سنوجد النقطتين R_a و R_b على اعتبار أن AR_a و BR_b و CR_c كلها تمر من النقطة R التي هي الجذر التربيعي للنقطة H.

لنفترض حزمة من الدوائر المارة من النقطتين H_b و H_c. كل دائرة من هذه الدوائر تقطع المستقيم BC في نقطتين. فقط هناك دائرة واحدة تقطع المستقيم H_bH_c ، حيث أن المستقيم يكون وقعاً في اللانهاية والنقطة $H'_a = H_bH_c \cap BC$ تتوافق مع نقطة اللانهاية للمستقيم BC. إن النقطة H_a' هي نظيرة النقطة H_a بالنسبة لـ B و C.

الحالة الثانية

نفرض أنه لدينا جملة إكسونومترية مركزية أساسية عامة $(O, E_x, E_y, E_z, U_x, U_y, U_z)$ في مستوي إسقاط P^2، فإننا سنرمز لآثار المركز العمودي $U_1U_2U_3$ بالرموز T_{12} و T_{13} و T_{23}. سنوجد النقطة R_{12} وهي نقطة تقاطع U_1U_2 و OE_{12}. بشكل مشابه سنوجد R_{13} و R_{23}.

تكون الجملة السابقة جملة إسقاط مركزية إذا وفقط إذا أمكننا رسم الدوائر الثلاث التالية:

الدائرة المارة عبر T_{12} و T_{13} والمماسة لـ U_2U_3 في R_{23}.
الدائرة المارة عبر T_{12} و T_{23} والمماسة لـ U_1U_3 في R_{13}.
الدائرة المارة عبر T_{13} و T_{23} والمماسة لـ U_1U_2 في R_{12}.

يبين الشكل (2) إمكانية رسم هذه الدوائر الثلاث. إن هذه الحالة تقودنا إلى إنشاء بسيط للتحقق فيا إذا كانت الجملة هي جملة إسقاط مركزية. نلاحظ أن وجود هذه الدوائر ضروري على اعتبار أن ل دائرة تحقق إحدى النسب الواردة في المعادلة (1) [9]. إن السماح بالحلول السالبة في المعادلة (2) يؤدي إلى حل بديل لـ R_{12} و R_{13} و R_{23}، وبالتالي نحصل على ثلاث دوائر بديلة يقابلها ثلاثة

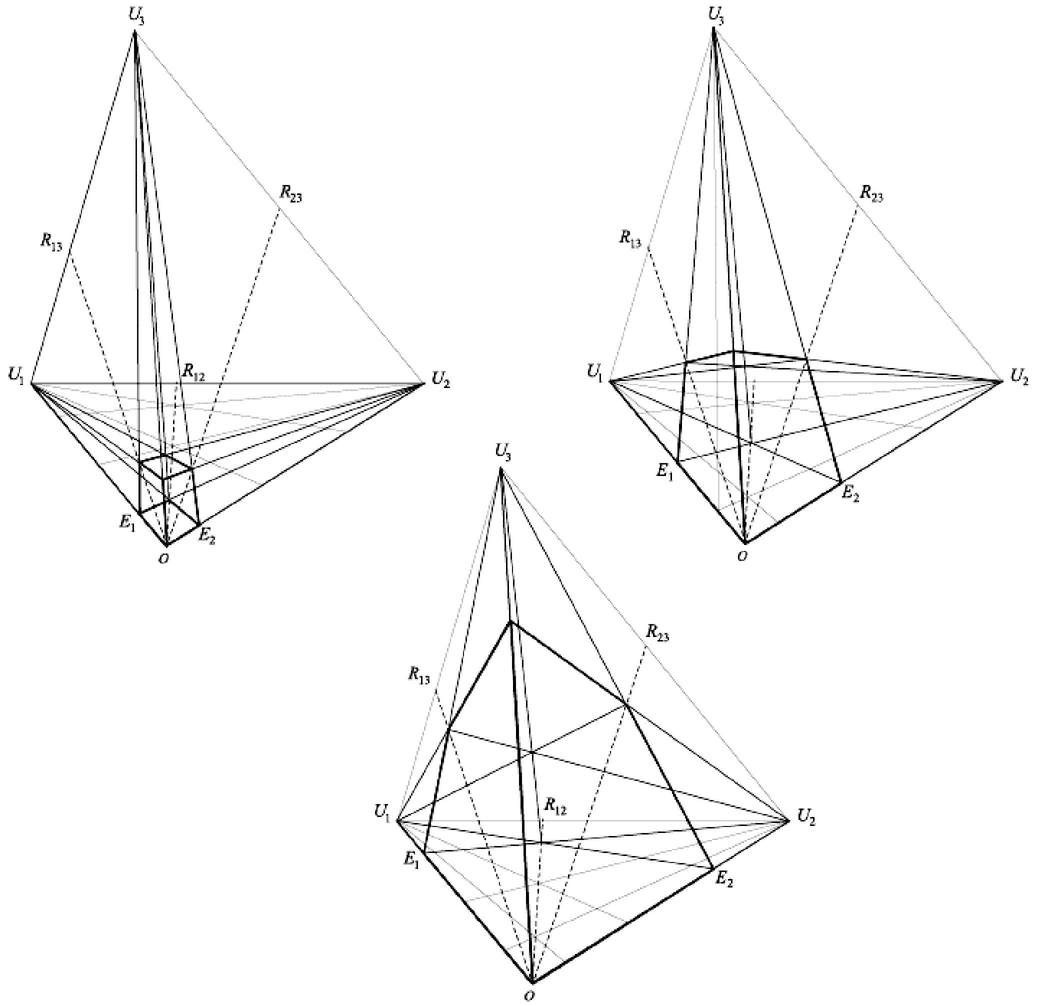
احتمالات أخرى للنقطة R. على سبيل المثال فإن بدائل النقطة R في الشكل (2) ستكون النقاط الفراغية الواقعة في اللانهاية : $(1,1,-1,0)$ ، $(1,-1,1,0)$ ، $(1,-1,-1,0)$ بالترتيب.

تحريك النقاط الواحدية على المحاور

إن تحريك إحدى النقاط الواحدية هي طريقة بسيطة لتغيير جملة الإسقاط المركزية، فمثلاً يمكننا تحريك النقطة الواحدية E_1 على طول محورها. النقاط O, E_1, E_2, E_3 تبقى كما هي، وهذا يعني أن الطرف اليميني من العلاقة (1) يبقى كما هو. من أجل الحفاظ على النسب في الطرف فاليساري من العلاقة وبالتالي الحفاظ على جملة الإسقاط المركزية، فإن النقطتين الواحديتين المتبقيتين E_2 و E_3 يجب تحريكهما كذلك. يمكن القيام بعملية حسابية تحليلية بسيطة من أجل هذه الحركة، كما يمكن إنشاء هذه الحركة بشكل بسيط عن طريق رسم المستقيمات OE_{12} و OE_{13} و OE_{23} للجملة الأصلية، وهنا يجب تحريك النقاط E_{12} و E_{13} و E_{23} على طول المستقيمات الثلاث السابقة. يبين الشكل (3) عدة واقع مختلفة للنقطة E_1 مع المواقع الموافقة للنقطتين الواحديتين E_2 و E_3، وهذا ما يؤدي إلى الحفاظ على جملة المحاور كجملة إسقاط مركزية. إن عملية التغيير في الجملة يتم إنشاؤها بسهولة وهي تعطي الانطباع لدى الناظر بالاقتراب أو الابتعاد عن الشكل. وبتعبير أكثر علمية، فإننا نبتعد ونقترب من المبدأ. إن هذا التأثير يشابه التأثير الذي نحصل عليه من إنقاص المسافة ما بين مبدأ الإحداثيات في الفراغ و مركز الإسقاط مع الحفاظ على المسافة بين مركز الإسقاط ومستوي الشكل. بالمقابل، فإن هذا الشرط يمكن تطبيقه من أجل تصحيح الجملة الإكسونومترية المركزية التي لا تحقق متطلبات جملة الإسقاط المركزية.

إذا أردنا تصحيح الجملة لجعلها تستوفي هذا الشرط ينبغي تحريك النقاط الأساسية فيها، أي النقاط الواحدية مع الحفاظ على النقاط O, E_1, E_2, E_3. بمعرفة الجملة الإكسونومترية المركزية أصبح بالإمكان رسم ثلاث دوائر في المثلث $U_1U_2U_3$ تمر من أثرين من آثار المركز العمودي وتمس الضلع الثالثة، وبالتالي نحصل على R_{12} و R_{13} و R_{23}، وهي نقاط التماس وفق النظرية الثانية. بشكل عام فإن أي من النقاط E_{12} و E_{13} و E_{23} لن تقع على المستقيمات OR_{12} ، OR_{13} ، OR_{23} على الترتيب. وهكذا فإن اثنتين من هذه النقاط كحد أدنى يجب تغيير مواقعها على طول محوريها.

إذا أردنا المحافظة على موقع إحدى النقاط الواحدية ولتكن E_1، فإن موقعي النقطتين الواحديتين المتبقيتين E_2 و E_3 يمكن تحديدهما بعملية إنشائية بسيطة ويكون الحل هو حل وحيد.



الشكل (3)

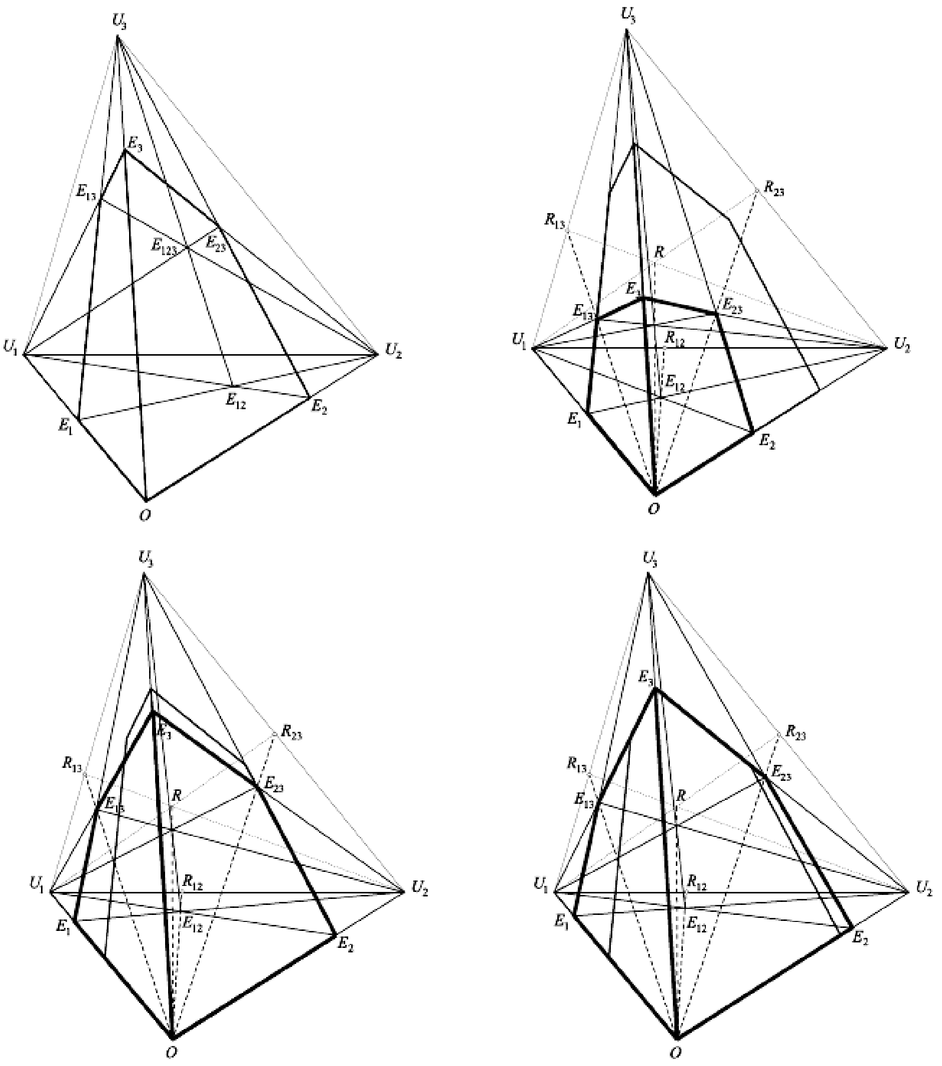
يوضح الشكل (4) ثلاث حالات للتصحيح:

الأولى بالمحافظة على $O,U_1,U_2,U_3.E_1$

الثانية بالمحافظة على $O,U_1,U_2,U_3.E_2$

والثالثة بالمحافظة على $O,U_1,U_2,U_3.E_3$

والرابعة أكثر تعقيداً وتتضمن تحريك النقاط الواحدية الثلاث في الجملة الإكسونومترية المركزية لتحويلها إلى جملة إسقاط مركزية، إلا أن هذا الحل يتضمن العديد من المواقع المحتملة، لذلك يفضل استخدام الحل الذي يعطي تشوهاً أصغرياً مقارنة بالجملة الأساسية. تحل هذه المسألة عن طريق حساب حركات النقاط الواحدية وبالتالي الحصول على القيمة الدنيا للمسافات بين مواقع النقاط الواحدية القديمة ومواقع النقاط الواحدية اللجديدة.



الشكل (4)