تمثيل المثلثات الكروية باستخدام طريقة الدوران*

ملخص البحث

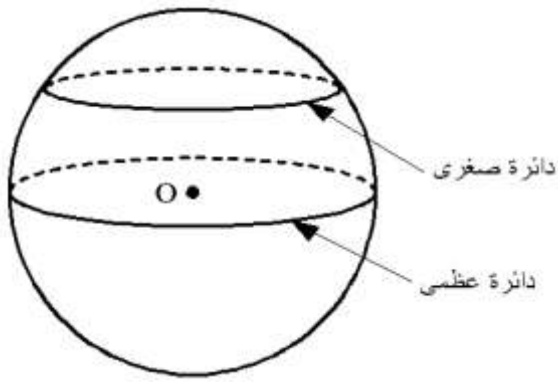
سندرس في هذا البحث طريقة تخطيطية لتمثيل المثلثات الكروية باستخدام طريقة الدوران وهي إحدى طرق الهندسة الوصفية المعروفة. بدأنا بتعريف المثلث الكروي وحددنا عناصره الستة وحصلنا على ست حالات مختلفة للمثلث الكروي بحسب العناصر المعلومة منه. قمنا بإعطاء الحلول الموافقة للحالات الثلاث الأولى حيث يتم إرجاع الحالات الثلاث المتبقية إلى إحدى الحالات المدروسة. إن استخدام المثلثات الكروية يسهل حل مسائل الملاحة البحرية والجوية وقد قمنا في نهاية البحث بإعطاء تطبيق عملي لإحدى هذه المسائل.

* د.م تيسير خليل – أستاذ مساعد في كلية الهندسة المدنية – جامعة البعث
م. رغيد عبد الصمد – مهندس في كلية الهندسة المدنية – جامعة البعث

تمثيل المثلثات الكروية باستخدام طريقة الدوران

١. مقدمة و تعاريف أساسية

ليكن لدينا كرة مركزها النقطة O ونصف قطرها R. ندعو أي دائرة تقع على محيط هذه الكرة بدائرة عظمى إذا كان نصف قطر هذه الدائرة مساوياً إلى R نصف قطر الكرة، كما هو مبين في الشكل (1).[1]

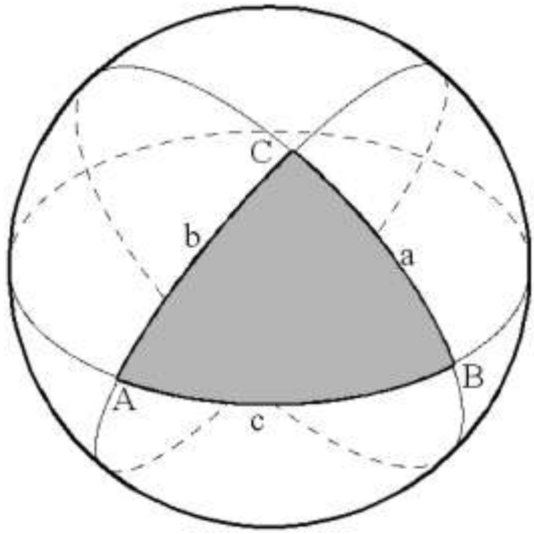


الشكل(1): الدائرة العظمى والدائرة الصغرى

المثلث الكروي هو الشكل المرسوم على سطح الكرة والناتج عن تقاطع ثلاث دوائر عظمى تتقاطع فيما بينها بنقاط هي رؤوس المثلث الكروي، وبالتالي يمكن اعتبار المثلث الكروي هو الشكل الكروي للمثلث المستو المعروف، ويسمى بمثلث أولر[2]. يبين الشكل (2) ثلاث دوائر عظمى مرسومة على كرة وتتقاطع في النقاط A ، B ، C محددة مثلث كروي ABC. مما سبق ينتج إن الرؤوس A ، B ، C لا يمكن أن تقع على دائرة عظمى واحدة[1,2]. بوصل هذه النقاط إلى مركز الكرة O إننا نحصل على زاوية ثلاثية مجسمة $O\text{-}ABC$. إذا كانت A ، B ، C هي زوايا المثلث الكروي مقدرة بالدرجات، فإن مساحة المثلث الكروي تعطى بالعلاقة

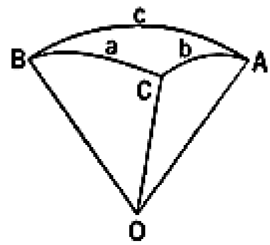
$$\Delta = R^2\,[(A + B + C) - 180^{o}] = R^2E \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث ندعو المقدار E بالزيادة الكروية، وعندما تكون $E = 0$ يصبح المثلث الكروي مثلثاً مستوياً[2]. إن مجموع زوايا المثلث الكروي يقع ما بين 180^{o} و 540^{o}، وندعو المقدار الفائض فوق القيمة 180^{o} بالزيادة الكروية E.[2,3]



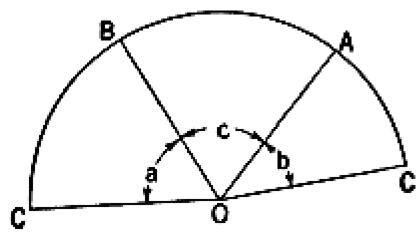
الشكل (2): المثلث الكروي ABC

نرمز لحروف المثلث الكروي المقابلة للرؤوس A ، B ، C بالرموز a ، b ، c بالترتيب وهي عبارة عن أقواس دائرية، كما هو مبين في الشكل (2) و(3). يتم قياس هذه الحروف عن طريق معرفة زوايا الوجه للزاوية الثلاثية المجسمة. تتحدد قيم زوايا المثلث الكروي A ، B ، C بمعرفة الزوايا الثنائية المجسمة لها والتي بدورها تتحدد بمعرفة الزاوية الثلاثية المجسمة[1,3,4]. وعليه، فإن المثلث الكروي يتألف (أو الزاوية الثلاثية المجسمة تتألف) من ستة عناصر: ثلاثة زوايا ثنائية مجسمة وثلاثة زوايا وجه[3].



الشكل (3): المثلث الكروي ABC

من أجل إنشاء زاوية ثلاثية مجسمة يجب أن تكون أي زاوية وجه أقل من مجموع زاويتي الوجه المتبقيتين[3,4]. إن حاصل نشر أوجه المثلث الكروي هو عبارة عن قطاع دائري نصف قطره يساوي إلى R نصف قطر الكرة، كما هو موضح في الشكل (4).



الشكل (4): منشور المثلث الكروي ABC

٢. إنشاء المثلث الكروي

يتم إنشاء المثلث الكروي بمعرفة ثلاث عناصر فقط من عناصره الستة آنفة الذكر، حيث أن العناصر الثلاث المتبقية يتم إيجادها من المعطيات مع إمكانية الحصول على أكثر من حل مقبول في بعض الحالات[4]. ضمن المعطيات السابقة، فإن إنشاء المثلث الكروي يقع ضمن إحدى ست حالات ممكنة هي كالتالي:

١- معرفة ثلاث زوايا وجه.

٢- معرفة زاويتي وجه والزاوية الثنائية المجسمة المحصورة بينهما.

٣- معرفة زاويتي وجه والزاوية الثنائية المجسمة المقابلة لهما.

٤- معرفة زاوية وجه واحدة وزاويتين ثنائيتين مجسمتين، الأولى مجاورة والثانية مقابلة لزاوية الوجه المعلومة.

٥- معرفة زاوية وجه واحدة والزاويتين الثنائيتين المجسمتين المجاورتين لها.
٦- معرفة ثلاث زوايا ثنائية مجسمة.

وعلى اعتبار أنه يمكن إرجاع الحالة السادسة إلى الحالة الأولى، والخامسة إلى الثانية، والرابعة إلى الثالثة بسهولة، لذا سنقوم بإعطاء الحلول الموافقة للحالات الثلاث الأولى فقط.

٣. حل المثلث الكروي في الحالة الأولى

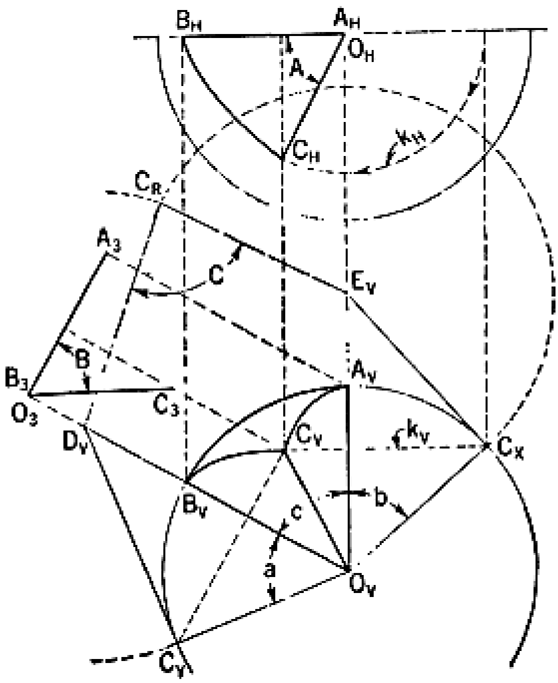
المعطيات: ثلاث زوايا وجه a ، b ، c – الشكل (5)

سنقوم بإيجاد منشور الزاوية الثلاثية المجسمة على اعتبار أن الحرف OA شاقولي. الزاوية $A_VB_VC_V$ تساوي إلى الزاوية c، والزاوية $B_VO_VC_Y$ تساوي إلى الزاوية a، والزاوية $A_VO_VC_X$ تساوي إلى الزاوية b. يتم إنشاء الزاوية الثلاثية المجسمة عن طريق طي الأوجه إلى أماكنها الصحيحة في الفراغ. سندور AOC و BOC حول الحرفين AO و BO بالترتيب مع الحفاظ على الوجه AOB ثابتاً وذلك حتى تلتقي الأحرف الخارجية عند الحرف OC للزاوية المجسمة.

المستقيم المار من النقطة C_X والعمودي على AO يمثل مسار دوران النقطة C_X في المسقط الجبهي، ويظهر مسار الدوران السابق كقوس دائرية k في المسقط الأفقي. المستقيم المار من النقطة C_Y والعمودي على BO يمثل مسار دوران النقطة C_Y.

يتقاطع هذين المستقيمين في النقطة C_V، وبذلك نكون قد حددنا الرأس C، علماً أن الرأسين المتبقيين هما A و B. إن شعاع الإسقاط المار من النقطة C_V يتقاطع مع القوس k_H في النقطة C_H، وبذلك نكون قد حصلنا على النقاط المحددة للزاوية الثلاثية المجسمة في المسقطين الأفقي والجبهي.

بعد ذلك يتم تحديد الأحرف B_HC_H و B_VC_V و A_VC_V، مع العلم أنه يتم رسم هذه الأحرف لزيادة الإيضاح في الشكل فحسب وهي غير لازمة لعمليات الإنشاء وإيجاد قيم الزوايا الثنائية المجسمة.



الشكل (5): حل المثلث الكروي في الحالة الأولى

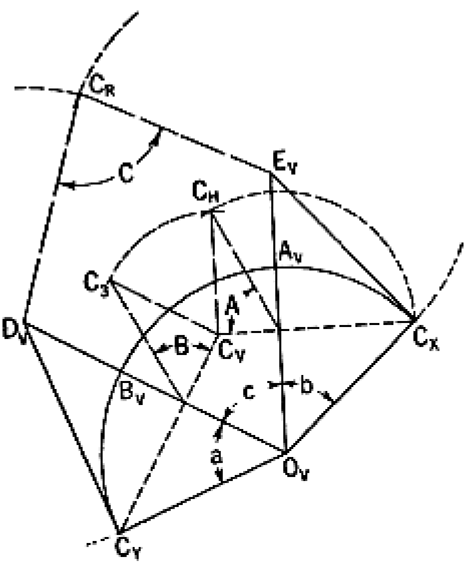
بما أن الحرف AO يظهر كنقطة في المسقط الأفقي ، فإن الزاوية الثنائية المجسمة A تعطي بواسطة $B_HA_HC_H$. الزاوية الثنائية المجسمة B يتم إيجادها عن طريق المسقط المساعد الذي يكون فيه مسقط المستقيم OB عبارة عن نقطة. الأوجه AOB و BOC يظهر مسقطيهما كمستقيمين. الزاوية B تعطى بـ $A_3B_3C_3$. الزاوية الثنائية المجسمة C يتم إيجادها عن طريق مسقط مساعد يكون فيه الحرف OC عبارة عن نقطة. الوجهين BOC و AOC يظهر مسقطيهما كمستقيمين.

نرسم المستقيم C_YD_V العمودي على المستقيم O_YA_V وذلك على منشور الوجه BOC. وبالمثل نرسم المستقيم C_XA_V العمودي على المستقيم C_XO_V وذلك على منشور الوجه AOC.

إذا تـم تـدوير الـوجهين السـابقين إلـى موقعيهمـا الصـحيحين فـي الفـراغ، فـإن المسـتقيمين CD و CA سـوف يشـكلان الزاويـة DCA والتـي قياسـها مسـاوٍ إلـى قيـاس الزاوية C.

يـتم إيجـاد القيـاس الحقيقـي للزاويـة DCA عـن طريـق تـدويرها إلـى $D_VC_RA_V$، ويكون قياسها مساوياً إلى قياس الزاوية C المطلوبة.

إن عملية الدوران السابقة هي عملية سهلة طالما أن D_VC_R و A_VC_R يساويان إلـى D_VC_Y و E_VC_X بالترتيـب. يبـين الشـكل (6) تمثـيلاً لعمليـات الإنشـاء المشـروحة سابقاً.



الشكل (6): إيجاد القياس الحقيقي للزاوية C

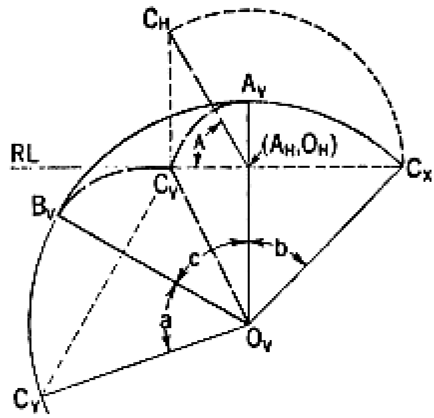
٤. حل المثلث الكروي في الحالة الثانية

المعطيات: الزاوية الثنائية المجسمة A وزاويتي الوجه b و c – الشكل (7)

لنفـرض أن AO هـو مسـتقيم شـاقولي ذو طـول محـدد. نرسـم منشـور الـوجهين المعطيين من الزاوية الثلاثية المجسمة وذلك على مستوي الإسقاط الجبهي، حيث $AOC = b$ و $AOB = c$.

نـدور AOC حـول المسـتقيم AO كمحـور دوران مـع الحفـاظ علـى الوجـه AOB فـي المسـتوي الجبهـي وذلـك حتـى تكـون الزاويـة بـين الـوجهين مسـاوية إلـى الزاويـة الثنائيـة المجسمة A.

إذا أخذنا مستقيماً مرجعياً ماراً من C_X، فإن المسقط الأفقي للوجه AOC بعد الـدوران سـيكون $A_HO_HC_H$. إن النقطـة C_X تـدور حتـى تأخـذ الوضـع C_V وذلـك فـي المستوي الجبهي، حيث C_V تقع على شعاع الإسقاط المار من C_H.



الشكل (7): حل المثلث الكروي في الحالة الثانية

يتم إيجاد زاوية الوجه a بتدوير الوجه BOC حول المستقيم OB كمحور دوران حتـى تقـع فـي المسـتوي الجبهـي. نرسـم مسـتقيماً عموديـاً علـى O_VB_V ومـاراً مـن C_V ويتقـاطع مـع القـوس الـدائري A_VB_V فـي النقطـة C_Y. الزاويـة $B_VO_VC_Y$ تكـون مسـاوية للزاويـة المطلوبـة a، باعتبـار أن ثـلاث زوايـا وجـه أصبحت معلومـة فإنـه بالإمكـان معرفـة باقي الزوايا، كما ورد في الحالة الأولى.

٥. حل المثلث الكروي في الحالة الثالثة

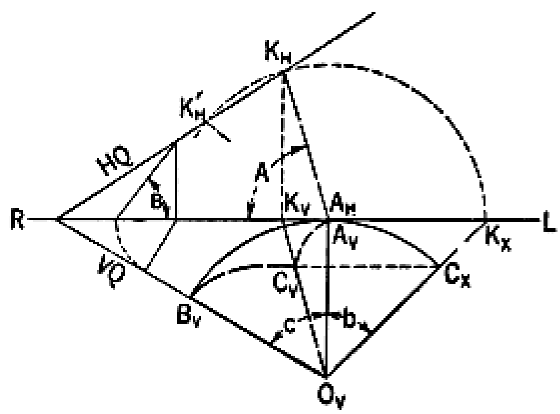
المعطيات: زاويتي الوجه b و c والزاوية الثنائية المجسمة B – الشكل (8)

نرسـم منشـور الـوجهين AOB و AOC علـى المسـتوي الجبهـي علـى اعتبـار الحـرف AO شـاقولي. نفـرض المسـتقيم RL مـار مـن النقطـة A. سـنفرض أن المسـتوي Q

مار من الحرف BO، وبذلك تصبح الزاوية B واقعة في مستوي الإسقاط الجبهي. يحتوي هذا المستوي على الوجه BOC. ندور الوجه AOC حول AO كمحور دوران حتى يقع الحرف OC في المستوي Q. ننشئ المستقيم O_XC_X والذي يتقاطع مع المستقيم RL في النقطة K_X. ندور المثلث DOK حول AO كمحور دوران حتى يقع الحرف OK في المستوي Q. يتم تحديد هذه الوضعية عن طريق قوس دائرية تمثل المسقط الأفقي لمسار دوران النقطة K. يتقاطع هذا القوس الدائري مع HQ في النقطتين K_H و K'_H، وبالتالي فهناك حلين للمسألة.

من الواضح أنه بالإمكان الحصول على حل واحد إذا كان القوس الدائري مماساً لـ HQ، في حين أن المسألة مستحيلة الحل إذا لم يتقاطع القوس الدائري مع HQ.

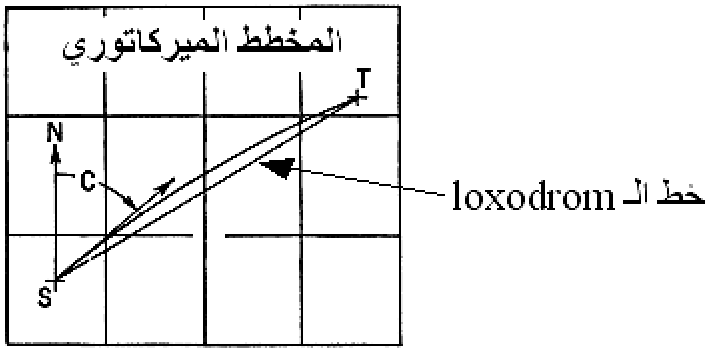
لإتمام أحد الحلين نرسم المستقيم K_HA_H والذي يمثل المسقط الأفقي للمستوي AOK الحاوي على الوجه AOC بشكله الحقيقي. الزاوية A الكائنة بين الوجهين AOB و AOC تظهر في المسقط الأفقي. المسقط الجبهي للحرف OC يقع على المستقيم O_VK_V. المستقيم المار من النقطة C_X والعمودي على المستقيم AO يمثل مسار دوران النقطة C_X. يتقاطع هذا المستقيم مع المستقيم O_VK_V في النقطة C_V، في حين يتم إيجاد باقي الزوايا كما في الحالة الأولى.



الشكل (8): حل المثلث الكروي في الحالة الثالثة

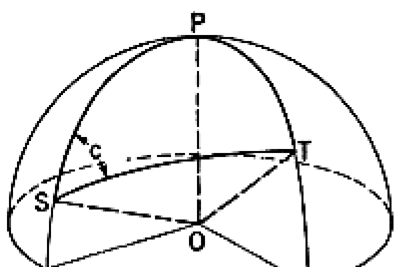
٦. تطبيق عملي

هنـاك العديـد مـن المسـائل يـتم حلهـا عـن طريـق المثلثـات الكرويـة، كمسـائل الملاحة البحرية والملاحة الجوية والشبكات الجيوديزية وغيرها من المسائل.



الشكل (9): المخطط الميركاتوري

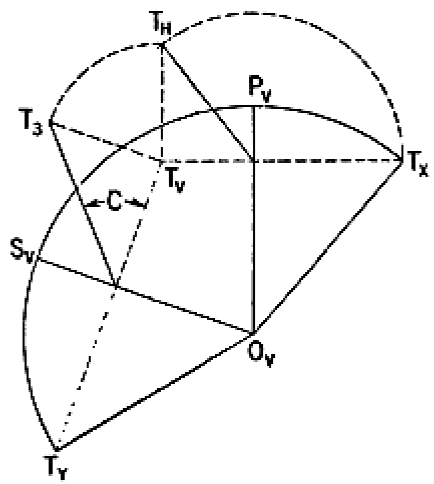
خط الاتجاه الثابت هو خط يقع على سطح الكرة الأرضية ويتقاطع مع كافة خطوط الطول بزاوية ثابتة ويدعى بمستقيم الـ *loxodrom*. من صفات هذا الخط أنه ذو سمت ثابت ويرسم كخط مستقيم على المخطط المبين في الشكل (9) المعروف باسم المخطط الميركاتوري[5]. في المخطط الميركاتوري ترتسم خطوط الطول كمستقيمات متوازية وكذلك خطوط العرض، وتكون خطوط الطول والعرض متعامدة فيما بينها. المسار الأقصر ما بين نقطتين هو عبارة عن قوس دائرية تتقاطع هذا مع خطوط الطول بزوايا مختلفة في الحالة العامة، وهذا المسار يرسم كخطٍ منحنٍ على المخطط الميركاتوري[5].



الشكل (10): تحديد المسافة الأقصر بين S و T

بفرض لدينا سفينة تريد أن تسلك المسار الأقصر بين النقطتين S و T. إن موقع النقطتين S و T يتحدد بمعلومية كل من خطي الطول وخطي العرض الخاص بهما كما هو مبين في الشكل (10). الزاوية الثنائية المجسمة تتحدد بالفرق ما بين خطي الطول للنقطتين S و T. ندعو خطي العرض الموافقين للنقطتين S و T بـ PS و PT ونعوها خطي زوال النقطتين S و T بالترتيب.

القوس ST يمثل طول المسار الذي سوف تسلكه السفينة، ويقاس على زاوية الوجه SOT للزاوية الثلاثية المجسمة $O\text{-}PST$. الزاوية C تساوي إلى الزاوية الثنائية المجسمة عند S. أي أنه أصبح لدينا الحرفين ST و PT في المثلث PST معلومين وكذلك الزاوية الثنائية المجسمة المحصورة بينهما، في حين أن الحرف ST والزاوية S يطلب إيجادهما. إن حل المسألة السابقة يؤول إلى حل مثلث كروي يقع ضمن الحالة الثانية الآنف الذكر، كما يوضح الشكل (11)



الشكل (11): إيجاد المسافة الأفصر عن طريق حل المثلث الكروي في الحالة الثانية

٧. نتائج البحث

١- إن حل مسائل المثلثات الكروية تخطيطياً هو مجال بحثي لم يسبق التطرق إليه، وغالباً ما يتم حل هذه المسائل تحليلياً بطرق رياضية طويلة ومعقدة نسبياً تصعب على المهندس، ولهذا تم إيجاد طريقة تخطيطية لتمثيل المثلثات الكروية

وحل كافة مسائلها بالاستعانة بطريقة الدوران وهي طريقة سهلة في الهندسة الوصفية.

٢- تم اختيار محور الدوران كمحور شاقولي في كافة الحالات، علماً أنه كان بالإمكان أن يتم اختيار محور الدوران أمامياً.

٣- إن تمثيل المثلثات الكروية يؤدي إلى سهولة حل المسائل المتعلقة بها، كمسائل الملاحة البحرية والجوية وحساب المسافات والزوايا المرتبطة بهذه المسائل.

المراجع العلمية

1. **Harris, J. W. and Stocker, H**. "*General Spherical Triangle*." , New York, Springer-Verlag, pp. 108-109, 1998.
2. Web Site: www.planetmath.org , articles about Spherical Triangles.
3. **Earle F. Watts and John T. Rule**. "*Descriptive Geometry*.", New York, Prentice-Hall Inc., pp:232-238, 1986.
4. **C. W. MacCord** . "Elements of descriptive geometry." , London , Chapman & Hall limited , pp: 181-190, 203-233 , 1994.
5. **Green, R. M**. "*Textbook on Spherical Astronomy", 6th ed.* Cambridge, England: Cambridge University Press, 1985.

Representing Spherical Triangles By The Rotation Method

Abstract

In this research we will study a graphical method for representing the spherical triangles by using the rotation method, which is one of the well-known methods of descriptive geometry. We started by defining the spherical triangle and we determined its six elements and we found out six different cases according to its known elements. We introduced the solutions corresponding to the first three cases, as the three remaining cases are to reduced to one of the studied cases. Using spherical triangles eases solving problems of marine and aerial navigation. At the end of the research we gave a practical application to one of this problems.