تمثيل السطوح الدورانية في الإكسونومترية المائلة *

ملخص البحث

في هذا البحث سنعطي طريقة جديدة لرسم السطوح الدورانية في الإكسونومترية المائلة، حيث سيتم تمثيل السطح الدوراني عن طريق استخدام المسقط الشاقولي فقط، والذي عادة ما يعتبر المسقط الأكثر أهمية للجسم. سوف يتم استخدام مستوي شاقولي إضافي مع رسم مسقط الجسم عليه حسب إسقاط مونج. إن الطريقة المتبعة في تمثيل الأجسام هي طريقة المخاريط والأسطوانات المماسية المعروفة. سوف نوجد العلاقة التي تعطينا الكونتور المولد للسطح الدوراني. أخيراً سوف نقوم بتطبيق نتائج البحث في تمثيل سطح دوراني مرسوم وفق منظور كابينيت وباستخدام نفس الخطوات الإنشائية التي سوف نشرحها في هذا البحث.

* د.م. تيسير خليل – أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة المدنية

تمثيل السطوح الدورانية في الإكسونومترية المائلة

مقدمة عامة

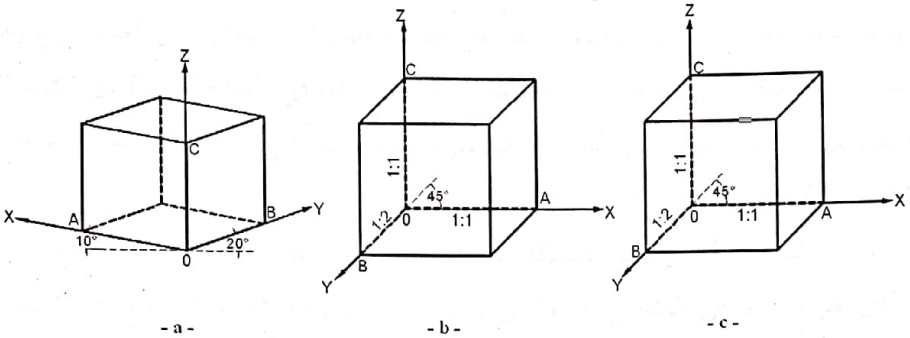
يمكن اختيار ثلاث قطع مستقيمة OA ، OB ، OC ، تلتقي في النقطة O، والتي هي مسقط لثلاثية إحداثيات قائمة متساوية الأضلاع شريطة ألا تقع القطع الثلاث على مستقيم واحد (نظرية بولكي). إذاً اختيار الثلاثية مع مساقط وحدات الأطوال عليها يتم بصورة كيفية. إن وحدة الأطوال تتحدد حتماً إذا أعطيت مساقطها المذكورة، إلا أن تعيينها يتطلب عمليات طويلة وشاقة، فإنشاء المسقط الإكسونومتري لجسم ما استناداً إلى ثلاثية الإحداثيات المأخوذة يكون غير مطابق لمسقط الجسم المطلوب لكنه مشابه له ونسبة التشابه مجهولة. فأخذ مسقط ثلاثية الإحداثيات بصورة كيفية لا يعطي صورة واضحة ومقبولة على الرغم من أنها صحيحة نظرياً.

هناك نوعان من الإسقاط الإكسونومتري المائل شائعة الاستعمال نظراً لسهولة إنشاء المساقط فيها: الإسقاط الإكسونومتري الجبهي والإسقاط الإكسونومتري العسكري.

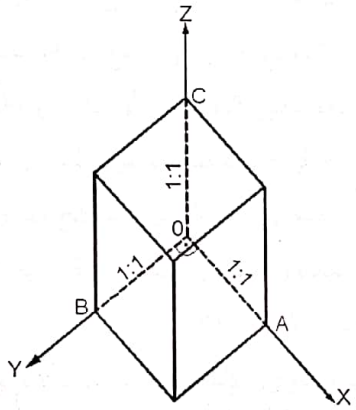
في الإسقاط الإكسونومتري الجبهي يؤخذ مستوي الشكل موازياً لمستوي الشكل xOz ، والأطوال المحمولة على المحورين x و z أو الموازية لهما وكذلك الأشكال الواقعة في المستوي xOz وفي المستويات الموازية له تظهر جميعها بكبرها الحقيقي. يؤخذ اتجاه مسقط المحور Oy بزوايا شهيرة يسهل رسمها مثل 30° أو 60° أو 45°، حيث تؤخذ على هذا المحور نسب التصغير 2:3 أو 3:4 أو 1:2 بالترتيب، وغالباً ما تستخدم الزاوية 45° والنسبة 1:2. في هذه الحالة يسمى الإسقاط بإسقاط كافالييير. يبين الشكل (1) مثالاً على اختيار ثلاثية الإحداثيات مع الزوايا.

أما في الإسقاط العسكري فيكون مستوي الشكل موازياً للمستوي الأفقي xOy. فمسقطا المحورين Ox و Oy متعامدان والمحور Oz يكون في وضعية كيفية بالنسبة للمحورين الآخرين، ولكنه يؤخذ دائماً إلى الأعلى، وتؤخذ الأطوال

المحمولة على المحاور الثلاثة بكبرها الحقيقي. يبين الشكل (2) مثـــالاً علـــى اختيـــار ثلاثية الإحداثيات مع الزوايا في المنظور العسكري.



الشكل (1): -a- مثال حول اختيار ثلاثية الإحداثيات
-b- مثال أول على تمثيل مكعب في منظور كافالبير
-c- مثال ثان على تمثيل مكعب في منظور كافالبير



الشكل (2): تمثيل مكعب في المنظور العسكري

رسم السطوح الدورانية

هناك بعض الطرق المعروفة في الهندسة الوصفية تستخدم من أجـــل تمثيـــل الكونتورات المولدة للأسطح الدورانية في الإكسونومترية العامودية، وتعتبـــر طريقـــة الكرات المماسية و وطريقة المخاريط والأسطوانات المماسية من أشهر هذه الطـــرق. إضافة إلى ذلك، فإنه بالإمكان استخدام الطرق آنفة الذكر في رســـم ظـــلال الأســـطح الدورانية في الإكسونومترية العمودية. ويعتبر استخدام هذه الطـــرق مـــن المواضـــيع

المتقدمة في الهندسة الوصفية ويمكن مصادفتها في المراجع العليا الخاصة بالهندسة الوصفية. وعلى الرغم من كل ما سبق، فإن هذه الطرق لا تصح في حالة الإكسونومترية المائلة. سوف نبحث هنا في طريقة بسيطة وناجعة من أجل رسم وتمثيل الأسطح الدورانية في الإكسونومترية المائلة وذلك في الحالة التي يكون فيها المستوي الإكسونومتري هو المستوي الجبهي، وخصوصاً في الإسقاط من نوعي كابينيت وكافاليير.

يكمن الحل الرئيسي للمسألة في كيفية رسم الكونتور المولد للسطح الدوراني، والذي هو عبارة عن المنحني l، والذي يتشكل من مجموعة النقاط المماسية لأشعة الإسقاط المرسومة للسطح الدوراني.

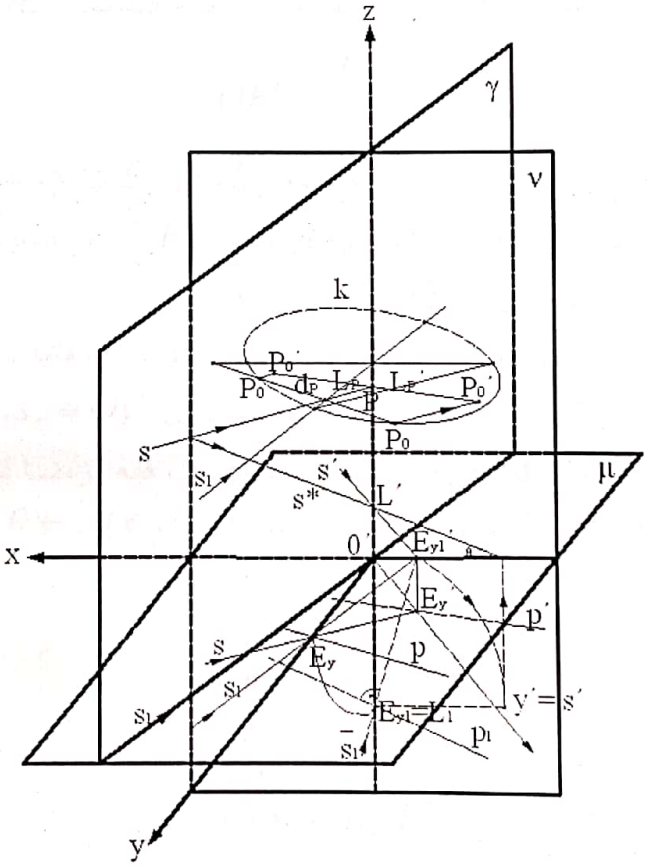
سوف نقوم باستخدام فكرة المخاريط والاسطوانات المماسية في إيجاد الكونتور المولد للسطح الدوراني، والذي يقسم السطح بدوره إلى نقاط مرئية وأخرى غير مرئية. لنفرض مخروطاً قاعدته توازي السطح الدوراني وتقع فوقه، عندها فإن النقاط الواقعة ضمن هذا المستوي الموازي، تقع على الكونتور l الخاص بالسطح الدوراني. إذا علمنا الخطوات الإنشائية اللازمة لإيجاد نقاط الكونتور للمخاريط والإسطوانات، عندها فإننا سوف نحدد نقاط الكونتور المنحني l الخاص بالسطح الدوراني.

لنفرض أن لدينا جملة محاور محاور إحداثية ديكارتية $Oxyz$، يتم تحديدها عن طريق مستوي الإسقاط الأفقي $\mu = Oxy$ ومستوي الإسقاط الجبهي $\nu = Oxz$، بالإضافة لوجود مستوي الإسقاط الإكسونومتري ρ والذي سوف نعتبره منطبقاً على مستوي الإسقاط الجبهي ν، أي $\rho \equiv \nu$.

لنفرض أن لدينا سطحاً دورانياً محور دورانه Oz. سوف نلجأ إلى استخدام مستوي إسقاط إضافي، والذي هو المستوي γ المار من المحور Oz والمار من أشعة الإسقاط s، وفق ما هو مبين في الشكل (3).

وبالمحصلة فإن نقاط المنحني l متناظرة بالنسبة للمستوي γ الآنف الذكر، وبالتالي فإن المساقط القائمة على المستوي γ لكل نقطتين متناظرتين يكونان متطابقين. إن هدفنا هو إيجاد مسقط المنحني l على المستوي γ.

يبين القسم العلوي من الشكل (3) أن منحنياً k تم رسمه بالإضافة إلى نقطتين تم ترميزهما بـــ P_0 بحيث أن هاتين النقطتين متناظرتين بالنســبة للمســتوي γ. إن المسقطين القائمين لهاتين النقطتين ينطبقان على النقطة P. إن المسقط الإكسونومتري للنقطة P على المستوي ρ هو النقطة P' التــي تقــع علــى المحــور Oz، أي $P' \in Oz$. إذا كنا نقوم بعملية الرسم في حالة الإكسونومترية العمودية، عندها فــإن الوتر P_0P_0 يكون معامداً للمحور Oz، أو موازياً للمستوي ρ، ولهذا السبب فإنــه سوف يكون مرسوماً بطوله الحقيقي، إلا أنه في حالتنا، أي في حالــة الإكســونومترية المائلة فإن الحقائق السابقة غير صحيوحة، وسوف نبين فيما يلي الخطــوات الإنشــائية اللازمة لإيجاد مسقط الوتر P_0P_0.



الشكل (3)

نموذج الإسقاط حسب مونج

لندرس الإسقاط من نوع كابينيت ذو الزوايا الإكسونومترية والبارامترات التالية

$$\angle x'Oz' = \angle xOz = 90^o$$
$$\angle x'Oy' = 135^o$$
$$p = r = 2q = 1$$

سوف نقوم بإيجاد المساقط العمودية لشعاع الإكسونومترية s على كل من مستويي الإسقاط μ و ν. ولهذا فإننا سوف نقوم باستخدام النقطة $E_y \in Oy$، كما هو مبين في الشكل (3) ، والتي مسقطها هي النقطة $E'_y \in Oy'$. وكما نعلم أن طول القطعة المستقيمة OE'_y يعادل نصف طول القطعة المستقيمة OE_y، أي نكتب

$$\left|OE'_y\right| = \frac{\left|OE_y\right|}{2}$$

إذا درسنا الشعاع s المار من النقطة E_y، أي $s \supset E_y$، فإننا سوف نرى أن المسقط العمودي لـ s على المستوي μ هو $s_1 = E_y E'_{y,1}$، وعندها فإن المستوي γ يمر من المحور Oz وهو يوازي s_1.

لإيجاد المسقط العمودي لـ s على المستوي $\rho \equiv \nu$، فإننا نقوم بإسقاط النقطة E_y على O وبحيث أن $E'_y \in \nu$، وبالتالي فإن $s_2 \equiv Oy'$.

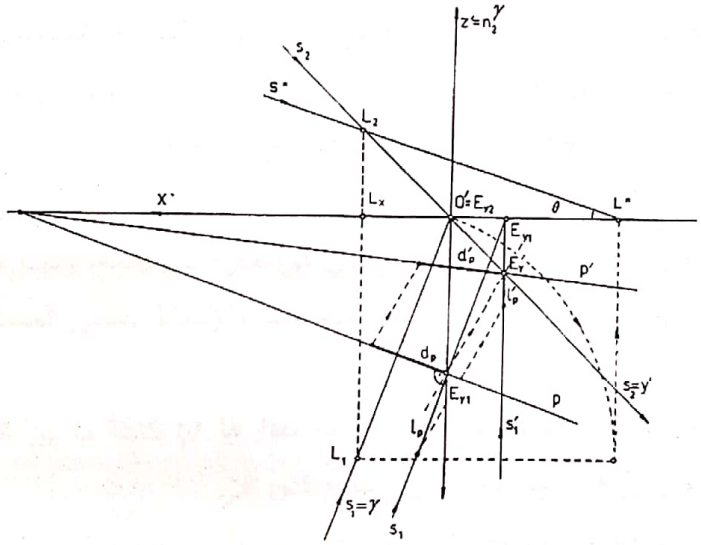
من أجل إيجاد المسقط العمودي لـ s على المستوي γ، فإنه يلزمنا إيجاد قياس الزاوية θ الكائنة بين الشعاع s والمستوي μ، أي $\theta = \angle(s, \mu)$. ولهذا السبب سوف نقوم بتدوير المستوي μ حول المحور Ox وصولاً إلى المستوي ν وبحيث أن

$$E_y \to E_{y,1}$$
$$E'_{y,1} \to E'_{y,1}$$
$$s_1 \to \bar{s}_1 = E_{y,1} E'_{y,1}$$

ومن خلال دراسة هذا النوع من الدورانات نكون قد أوجدنا نموذج الإسقاط حسب مونج.

من أجل إيجاد قيمة الزاوية θ فإننا سوف نقوم الشعاع s حول المحور الشاقولي وصولاً إلى وضعيته الجديدة s^*، وذلك مروراً بالنقطة العشوائية L وبحيث أن الشعاع s يصبح موازياً لمستوي الإسقاط ν، وهذا ما يوضحه الشكل (3) حيث اخترنا أن يكون $L_1 = E_{y,1}$.

يبين الشكل (4) خطوات الإنشاء الكاملة. الشعاع s الذي يمر من النقطة O، أي $s \subset O$، مسقطاه حسب إسقاط مونج هما s_1 و $s_2 = Oy'$ و النقطة L هي نقطة عشوائية تقع على الشعاع s. عن طريق تدوير النقطة O حول L_1 والإسقاط على Q فإننا سوف نحصل على s^* المنطبق على L_2Q، أي $s \equiv L_2Q$، وبعدها فإن $\angle\theta = \angle(x', s^*)$.



الشكل (4)

بالإضافة إلى كل ما سبق، فإنه يلزمنا إيجاد مساقط القطع الأفقية التي لها نفس منحى s_1. يبين الشكل (3) والشكل (4) أن القطعة المستقيمة التي طولها l_p قد رسمت منطبقةً على s_1، وأن القطعة المستقيمة التي طولها l_d تقع على المستقيم p

المعامد للشعاع s_1، أي أن $p \perp s_1$. هناك علاقة ϕ تربط ما بين المسقط الأول للنقاط الواقعة في المستوي μ والمرسومة حسب إسقاط مونج من جهة وللمساقط الإكسونومترية لهذه النقاط من جهة أخرى، وذلك بعد تدوير المستوي μ حول المحور Ox وصولاً إلى المستوي ν. وهنا تكون علاقات التحويل التالية محققة

$$E_{y,1} \rightarrow E'_y$$

$$s_1 \equiv E_{y,1}E'_{y,1} \rightarrow E'_y E'_{y,1} \equiv s'_1$$

ومن خلال العلاقتين السابقتين يتضح لنا لأن

$$s'_1 \perp Ox'$$

الخطوات الإنشائية اللازمة لإيجاد كونتورات المخاريط المماسية

لندرس سطحاً دورانياً ذو محور دوران شاقولي، وهنا يمكن تعيين السطح الدوراني عن طريق كونتوراته المولدة والواقعة في مستوي الإسقاط الجبهي. إن مستوي الإسقاط الجبهي في هذه الحالة هو المستوي الأكثر أهمية، في حين أن مستوي الإسقاط الأفقي هو ذو أهمية أقل حيث يظهر مسقط السطح الدوراني على مستوي الإسقاط الأفقي على شكل محيطات دوائر متوازية ولها مركز واحد هو مسقط محور الدوران الشاقولي على مستوي الإسقاط الأفقي والذي هو عبارة عن نقطة، ولهذا السبب فإننا سوف نوجد طريقة إنشاء هذه السطوح دون الاستعانة بالإسقاط على المستوي الأفقي μ.

لندرس مخروطاً دورانياً ذو قطر r وزاوية مقدارها φ كائنة ما بين القاعدة والمولد. سوف نفرض أن هذا المخروط يمس السطح الدوراني.

سوف نستخدم طريقة الإسقاط حسب مونج وذلك على مستويي الإسقاط μ و γ. يبين الشكل (5-a) أن أشعة الإسقاط s موازية للمستوي γ وبحيث أن $\angle(s,\mu) = \angle(s^*, x) = \angle\theta$. النقطة V^s هي مسقط النقطة V على مستوي الإسقاط μ وفق أشعة الإسقاط s. إن مماسات الدائرة المارة من النقطة V_1^s تحدد نقاط التماس X_1 و Y_1. نحصل على المولدات XV و YV والتي تقسم الفراغ إلى قسمين أحدهما مرئي والآخر غير مرئي.

بالعودة إلى الشكل (5-a) يمكن أن نكتب

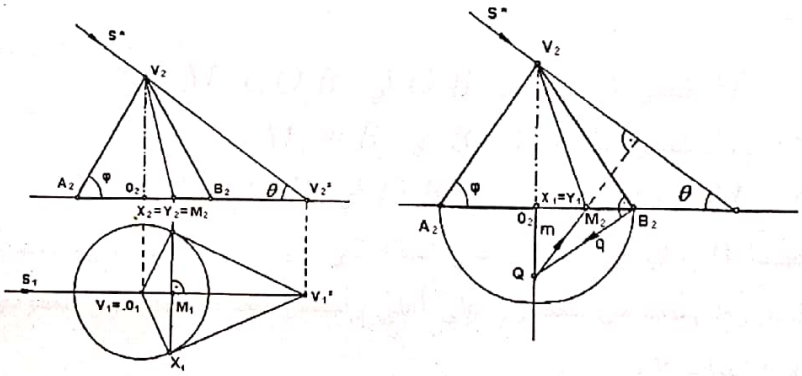
$$O_2M_2 = O_1M_1 = \frac{r^2}{O_1V_1^S} = \frac{r^2}{O_2V_2^S} = r\frac{r}{O_2V_2^S}$$

ولكن

$$\frac{r}{h} = \cot\varphi \quad \text{و} \quad \frac{O_2V_2^S}{h} = \cot\theta$$

ولهذا

$$O_2M_2 = r\frac{r}{h\cot\theta} = r\cot\varphi\tan\theta$$



-a- -b-

الشكل (5)

وباستخدام العلاقة السابقة فإنه يمكننا أن نوجد طريقة الإنشاء التالية على اعتبار أن المسقط الجبهي للمخروط معلوم وكذلك أشعة الإسقاط s_2، كما يوضح الشكل (5-b):

١- نرسم نصف الدائرة $K(O_2,r)$ والتي مركزها النقطة O_2 ونصف قطرها r.

٢- نرسم المستقيم q المار من النقطة B_2 أي $q \in B_2$ ، وبحيث أن المستقيم q يعامد المستقيم B_2V_2 أي $q \perp B_2V_2$.

٣- نحـــدد النقطـــة Q نقطـــة تقـــاطع المســـتقيمين q و V_2O_2 أي $Q = q \cap V_2O_2$.

٤- نرسم المستقيم m المار من النقطة Q وبحيث يعامد شعاع الإسقاط s_2 أي $m \supset Q, m \perp s_2$

٥- نحدد النقطة M_2 المنطبقة على النقطتين X_2 و Y_2 وذلك عن طريق إيجاد نقطـــة تقـــاطع المســـتقيم m مـــع المســـتقيم A_2B_2 أي $M_2 \equiv X_2 \equiv Y_2 = m \cap A_2B_2$.

ويمكننا أن نلاحظ بسهولة أن المعادلات الواردة سابقاً هي محققة وأن

$$O_2M_2 = r \cot\varphi \tan\theta$$

يمكن الحصول على الحالات التالية للنقطة M_2 والتي هي مستقلة عن الـــزاويتين φ و θ:

١- M_2 تنتمي إلى المستقيم O_2B_2 أي $M_2 \in O_2B_2$.

٢- M_2 تنطبق على النقطة B_2 أي $M_2 \equiv B_2$.

٣- M_2 لا تنتمي إلى المستقيم O_2B_2 أي $M_2 \notin O_2B_2$.

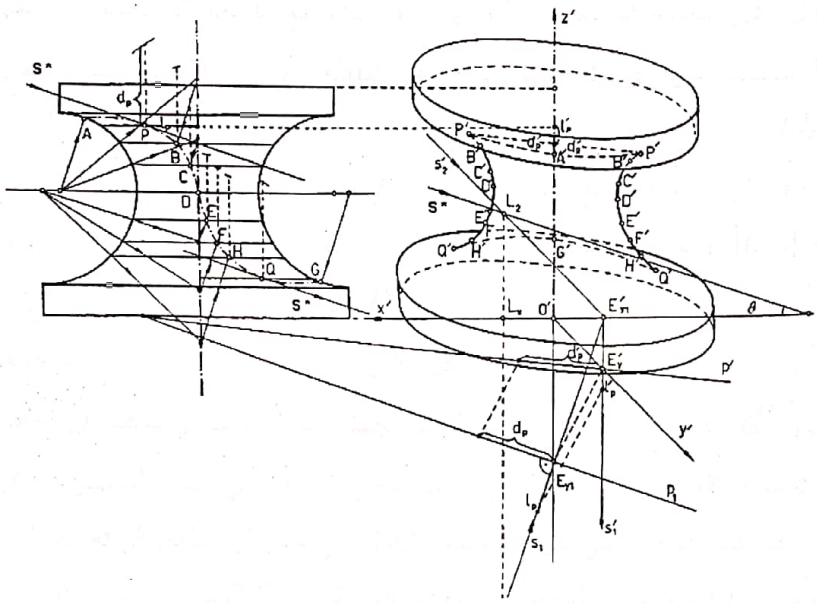
عندما $\varphi = 0$ فإننا نحصل على الحالة التي فيها $M_2 \equiv B_2$. إن استخدام مثل هذا المخروط يمكننا من الحصول على أعلى وأخفض نقط من الكونتور العمودي على مستوي الاسقاط γ.

عندما $\varphi = 90^o$ فإننا نحصل على أسطوانة مماسية ويكون $M_2 \equiv O_2$، وهذا يعني أن مساقط l والمحور Oz يتقاطعان.

تطبيق الخطوات الإنشائية السابقة من أجل رسم السطوح الدورانية

يبين الشكل (6-b) مثالاً تطبيقياً وهو عبارة عن سطح دوراني مرسوم حســب إسقاط كابينيت. كما يبين الشكل المذكور كذلك الشـــعاعان s_1 و $s_2 = Oy'$. يـــتم إيجاد الزاوية θ والشعاع s^* وذلك بعد إنجاز عملية دوران حول المحور الشـــاقولي المار من النقطة L إلى موقع جديد موازٍ للمستوي ν وذلـــك مـــن خـــلال عمليـــات الإنشاء الموضحة في الشكل (6).

من خلال القيام بعملية التدوير حول المحور Oz يصبح المستوي γ موازياً للمستوي $\nu = \rho$. يبين الشكل (6-a) المسقط القائم للسطح والشعاع s^*. سوف نقوم بإسقاط المنحني l على المستوي γ.



-a- -b-

الشكل (6)

عن طريق أنصاف الأقطار المعامدة لـ s^* فإنه يتم إيجاد النقطتين A و G والتي تنتميان إلى كونتور الإسقاط في المستوي γ، والنقطتين A' و G' تقعان على المحور Oz، وهذه هي الحالة التي نحصل عليها عندما يكون $\varphi = \theta$. النقاط D تقع على الخط الموازي الأخفض وعندما $\varphi = 90^o$. النقاط $B, C, E, F, ...$ من الخط المنحني l تقع على مستقيمات متوازية مختلفة. إن المماسات المرسومة للمنحني l والتي لها نفس منحى s^* تحددان النقاط P و Q، ومن خلالها يمكن إيجاد النقاط المقابلة P' و Q'. إن المنحني l يقسم الفراغ إلى قسمين: الأول مرئي ويقع على يسار المنحني l، والآخر غير مرئي ويقع على يمين المنحني l.

إن عمليات الإنشاء المتبعة للوصول إلى النقاط P' مبينة على الشكل (6-a). يتم رسم المستقيم العمودي المار من النقطة P والمعامد للقطعة المستقيمة (والذي هو مسقط المستقيم الموازي). نقطع هذا المستقيم العمودي بواسطة نصف القطر الموافق. يتم الحصول على القطعة المستقيمة d_p بهذه الطريقة. تقع القطعة المستقيمة l_p على مسقط هذا المستقيم الموازي وله نهاية يسرى هي النقطة P ونهاية يمنى تقع على المحور Oz.

سوف نرسم هذه القطع المستقيمة على p_1 و s_1 على الترتيب، كما هو مبين في الشكل (6-b)، ويمكن أن نحدد المساقط d'_p و l_p باستخدام العلاقة بين المساقط والتي تم إيجادها. يتم تحريك منتصف الوتر $P'P'$ هبوطاً على طول المحور Oz بالمقدار l'_p. نرسم هذه القطع المستقيمة بشكل تكون موازية لمنحى القطعة المستقيمة التي طولها d'_p ومساويةً لها بالطول، وذلك من جهتي اليمين واليسار.يمكننا أن نلاحظ أن كافة النقاط الواقعة في منتصف القطع المستقيمة والتي تقع إلى يسار المحور Oz سوف يتم تحريكها هبوطاً على طول المحور Oz، في حين أن النقاط الواقعة إلى يمين المحور Oz سوف يتم تحريكها صعوداً على طول هذا المحور، تماماً وفق ما يوضحه الشكل (6-a).

النتائج والاستنتاجات

إن هذه الطريقة تمكننا من تمثيل السطوح الدورانية في الإكسونومترية المائلة. الأمر الجديد والمهم في هذه الطريقة هو استخدام مسقط واحد للجسم الهندسي، وهو المسقط الشاقولي فقط. تم إيجاد العلاقات بين المساقط المختلفة وتمت دراسة طريقة إيجاد الأشكال الحقيقية للأجسام. يمكننا استخدام نفس الخطوات الإنشائية من أجل إيجاد ظلال السطوح الدورانية، كما يمكن دراسة منظور كافالييير بشكل مشابه تماماً.

المراجع

١- **بساطة**، محمد صالح ، ١٩٧٩-١٩٨٠، الهندسة الوصـــفية. الطبعـــة الخامسة، منشورات جامعة حلب، سورية، عدد الصفحات ٣٧٠.

2- **Д. Чорбаджиев**, 1992, Дескрилтивна геометрия. Народна просвета, София.

3- **Ж. Живкова**, 1995, Сенки върху ротационни повхърхнини. РИК ТЕМПО, София.

Representing Rotary Surfaces In Oblique Axonometry

Abstract

In this research, we will introduce a new method for drawing rotary surfaces in oblique axonometry. The important and new aspect in this method is drawing the rotary surface using the vertical projection only, which is usually considered as the most significant. An additional vertical plane is going to be used with the projection of the geometric body on it according to Monge projection. The procedure used demonstrating the bodies is the known tangent cones and cylinders. We will find the relationship that leads ti the generating contour of the rotary surface. Finally, we will employ the results of this research in representing a rotary surface drawn in cabinet projection and by using the same construction steps we will discuss in this research.