تحويل الشبكات الهندسية سداسية الوجوه إلى شبكات هندسية هرمية رباعية الوجوه *

ملخص البحث

في هذا البحث سوف نبحث في كيفية تحويل الشبكات الهندسية المؤلفة من أجسام سداسية الوجوه إلى شبكات هندسية مؤلفة من أجسام رباعية الوجوه عن طريق ألغوريتم خاص بهذه العملية.

الميزة الأساسية في هذا الألغوريتم أنه يقوم بعملية التحويل دون إدخال عقد جديدة على الشبكة الأصلية المفروضة. سنأتي في البدء على بعض التعاريف الأساسية البسيطة ومن ثم سنتطرق سريعاً لشروط ومعايير التطابق الهندسية. سوف ننطلق من شبكة سداسية الوجوه بسيطة جداً هي عبارة عن سداسي وجوه واحد وللسهولة سنفرض بأن سداسي الوجوه الوحيد هذا ما هو إلا المكعب الواحدي الذي طول ضلعه واحدة الأطوال وسنعمم النتائج المحصول عليها على الشبكات السداسية في الحالة العامة.

سنعرف ثلاثة نماذج من المثلثات المرسومة ضمن سداسيات الوجوه وسنتطرق لتعريف رباعي الوجوه النظامي وسنبرهن إنه بالإمكان إيجاد أربع نماذج من رباعيات الوجوه النظامية المقتطعة من سداسيات الوجوه مع ذكر خواص هذه النماذج. أخيراً سوف ندرس سبعة أنواع من تقسيمات الأوجه في سداسي الوجوه. وسوف نركز على خمسة أنواع منها ستلزمنا عند الانتقال من الشبكة السداسية إلى الشبكة الرباعية الوجوه.

* د.م. تيسير خليل – مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسية المدنية – جامعة البعث
م. رغيد عبد الصمد – كلية الهندسة المدنية – جامعة البعث

تحويل الشبكات الهندسية سداسية الوجوه إلى شبكات هندسية هرمية رباعية الوجوه

المقدمة والغاية من البحث

الشبكات الفراغية يمكن أن تكون إما سداسية الوجوه أو رباعية الوجوه وهناك سببين أساسيين لتحويل الشبكات السداسية الوجوه إلى رباعية الوجوه :

١- من أجل المقارنة بين النتائج لكلا النوعين من الشبكات من أجل مسألة معينة.

٢- قد نضطر أحياناً لاستخدام شبكة مختلطة مؤلفة من عناصر رباعية الوجوه وعناصر سداسية الوجوه، انطلاقاً من شبكة سداسية حيث نقوم بتحويلات هندسية على بعض أقسام الشبكة من أجل تحويل بعض العناصر السداسية إلى عناصر رباعية.

كل من الشبكتين السداسية الوجوه والرباعية الوجوه يجب أن تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية[5] والتي سوف نأتي على ذكرها في فقرة لاحقة. وعلى وجه الخصوص سنفترض أن أي وجه لأي عنصر أما أنه واقع على المحيط الخارجي أو أنه وجه مشترك داخلي مابين عنصرين متجاورين في الشبكة [٥].

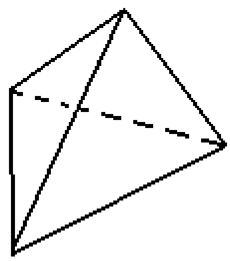
قد يبدو للوهلة الأولى أنه من السهولة بمكان تقسيم سداسي الوجوه إلى خمس أو ست رباعيات وجوه، حيث أنه يتم تقسيم كل سداسي وجوه من الشبكة للحصول على شبكة من رباعيات الوجوه إلا أن هذه التقسيمات المحلية ليست مستقلة عن بعضها البعض، فمن أجل الحصول على شبكة تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية يجب أن يتم تقسيم كل وجه بنفس الأسلوب وبنفس الطريقة لكلا العنصرين المتجاورين (المشتركين بهذا الوجه)[٥]. فيما بعد سنقوم بتقسيم جميع الأوجه ومن ثم نقسم سداسي الوجوه وفقاً لأقسام الأوجه المقسمة الناتجة. ولكن هذا الأمر غير ممكن بالنسبة للتقسيمات العشوائية للأوجه وعلى الرغم مما سبق فإن هذه المشكلة يمكن حلها عن طريق الألغوريتم موضوع الدراسة.

تعاريف أساسية

سوف نقوم بإعطاء بعض التعاريف الأساسية والأولية لبعض المفاهيم التي سنتناولها في هذا البحث وعلى الرغم من أن بعض هذه التعاريف هي بسيطة ومعروفة لدى الدارسين المهتمين إلا أن ذكرها هنا هو أمر أساسي.

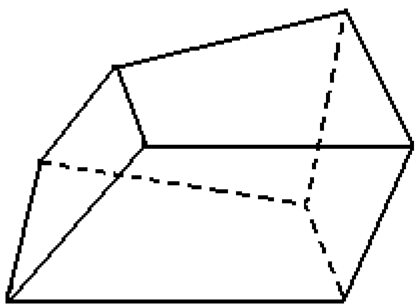
الشبكة الهندسية: وهي عبارة عن مجموعة من الذرى تربط بينها أجسام هندسية، وقد تكون الشبكات الهندسية ثنائية الأبعاد أي مستوية أو ثلاثية الأبعاد أي فراغية. يمكن أن نقول عن شبكة هندسية أنها شبكة عناصر محدودة وعندها فإننا ندعو الذرى عقداً أما الأجسام الهندسية فإنها إما أن تكون عناصر محدودة مستوية في حال كانت الشبكة مستوية أو عناصر محدودة فراغية في حال كانت الشبكة فراغية.

رباعي الوجوه: هو عبارة عن جسم هندسي مؤلف من أربع ذرى و أربع أوجه و ستة أحرف وقد يسمى أحياناً بالهرم رباعي الأوجه أو الهرم الثلاثي. يتقاطع كل وجهين بحرف ويتقاطع كل ثلاثة أحرف بذروة. يبين الشكل (١) رباعي وجوه بالحالة العامة.



الشكل (١) رباعي وجوه بالحالة العامة

سداسي الوجوه: هو عبارة عن جسم هندسي مؤلف من ثماني ذرى و ستة أوجه وإثنا عشر حرفاً. يتقاطع كل وجهين متقاطعين بحرف ويتقاطع كل ثلاثة أحرف متقاطعة بذروة. يبين الشكل (٢) سداسي وجوه بالحالة العامة.



الشكل (٢) سداسي وجوه بالحالة العامة

التحويلات الهندسية: هي مجموعة من الإجراءات والتعديلات الرسومية التي نقوم بها على الشبكات الهندسية من أجل تغيير مواصفات وخواص ونوعية هذه الشبكات. من أشهر التحويلات الهندسية القلب والعكس وإضافة الذرى وضغط الأحرف.

شروط ومعايير التطابق الهندسية

إن الألغوريتم موضوع البحث ينتج عنه شبكة هندسية تتألف من أجسام هندسية رباعية الوجوه انطلاقاً من شبكة هندسية تتألف من أجسام هندسية سداسية الوجوه. الشبكة رباعية الوجوه الناتجة يجب أن تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية إضافة إلى كون هذا الألغوريتم يطبق على شبكة هندسية تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية. الغاية من شروط ومعايير التطابق الهندسية هذه جعل الشبكة الهندسية قابلة للتحليل بالعناصر المحدودة دون وجود مشاكل من حيث الشكل الهندسي لهذه الشبكة.

إن هذه الشروط والمعايير تقتضي أن التداخل بين عنصرين يكون محدداً على ألا يكون التداخل بين أكثر من عنصرين، لهذا فإنه لا يمكن أن يشترك هرم رباعي وجوه مع سداسي وجوه بسطح مباشرة لأن سداسي الوجوه يملك فقط وجوه رباعية الأضلاع والهرم رباعي الوجوه يملك وجوه مثلثية الشكل. وهذا الشرط يجعل من تشكيل الشبكات الهندسية أمراً صعباً وللتخلص من صعوبة تشكيل مثل هذه الشبكات فإنه يتم إدخال الشروط الأولية للتطابق، مما يسمح باتصال وجهين مثلثين من هرمين رباعيي الوجوه إلى وجه رباعي أضلاع من سداسي وجوه بمشاركة أربع ذرى، مع العلم بأن هذا الاتصال غير متطابق أو بتعبير أكثر دقة إنه رباعي أضلاع غير متطابق. سوف نعرف فيما يلي شروط ومعايير التطابق الهندسية الأربع بشكل سريع دون التطرق للتفاصيل والجزئيات [5].

الشرط الأول:

في الرباعي الأضلاع غير المتطابق يجب أن يكون هناك هرمين رباعيي الأضلاع لكل منهما مثلث واحد يشتركان بثلاث أو أربع ذرى من رباعي الأضلاع غير المتطابق. رباعي الأضلاع الذي نحصل عليه من دمج المثلثين السابقين يجب أن يتساوى مع رباعي الأضلاع غير المتطابق.

الشرط الثاني:

إن قطر رباعي الأضلاع غير المتطابق يجب ألا يكون ضلعاً لرباعي أضلاع آخر.

الشرط الثالث:

إذا اشترك رباعيي أضلاع بذروتين فقط يجب أن يشتركا بضلع (أي إن الاشتراك فقط بقطر غير ممكن).

الشرط الرابع:

يجب ألا يشترك رباعيي أضلاع بثلاث ذرى فقط.

عرض الألغوريتم

سنبدأ بتقسيم كل وجه رباعي أضلاع بشكل قطري يبدأ من الذروة التي يشترك بها أقل عدد من الأحرف وهذا ما سيحقق شروط التطابق الهندسية. لندرس حالة سداسي ما h ولتكن v هي الذروة الواقعة في h التي يشترك بها أقل عدد من الأحرف. تلتقي ثلاث أوجه من h في الذروة v وهذا ما يجعل تقسيم سداسي الوجوه إلى ستة رباعيات وجوه ممكناً بحيث تكون v ذروة مشتركة الرباعيات الوجوه الناتجة.

أحياناً قد يكون لدينا شبكات ذات أشكال مشوهة مختلفة (النسب البعدية لعناصرها أو قياسات زواياها متفاوتة لدرجة كبيرة) فإننا نفضل في هذه الحالة القيام تقسيم الأوجه بحيث نقوم بتقسيم الزوايا ذات القياسات الكبيرة [2].

سوف نعرف تابعاً سندعوه تابع المتمايز $a(f)$ والذي يحدد التقسيم المفضل لكل وجه f. قد نضطر أحياناً إلى رفض تابع التمايز وتجاهله في لأنه لا يمكن الحصول على شبكات هندسية رباعية الوجوه تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية انطلاقاً من جملة من التقسيمات العشوائية للشبكات سداسية الأوجه . ولحل هذه المشكلة سنستخدم تابع آخر من توابع التمايز هو التابع $b(f_1 , f_2)$ في حال تعارض التابعين $a(f_1)$ و $a(f_2)$ ولم نستطع تحديد أي من خياري التقسيم هو الأفضل.

يملك رباعي الوجوه أوجهاً مثلثية مستوية الشكل في حين أن شكل سداسي الوجوه يتم تعريفه بشكل عام بمواقع ذراه. وهذا يعطينا إمكانية الحصول على أوجه مستطيلة منحنية والتي لا يمكن تقسمها إلى مثلثات مستوية. ولكي نتجنب هذه المشكلة سندرس سداسيات الوجوه ذات الأوجه المستوية.

بفرض لدينا شبكة سداسية الوجوه تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية $M = (V,E,F,H)$ معرفة عن طريق:

مجموعة من العقد V حيث كل عقدة $v = (x,y,z)$ تنتمي إلى الفراغ

ومجموعة من الأحرف E حيث $e = [ab]\ ;\ \{a,b\} \subset V$

ومجموعة من الأوجه F حيث $f = [a,b,c,d]\ ;\ \{a,b,c,d\} \subset V$

ومجموعة من سداسيات الوجوه H حيث $h = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}\ ;\ \{a,b,c,d,e,f,g,h\} \subset V$

سوف نبحث عن شبكة هرمية رباعية الوجوه $M` = (V,E`,F`,T)$ تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسة. هذه الشبكة الرباعية $M`$ لها نفس مجموعة الذرى V ولكن لها مجموعة مختلفة من الأحرف والأوجه والعناصر التي أشرنا إليها بـ $E`$ و $F`$ و T بالترتيب. كل سداسي وجوه يجب أن يكون عبارة عن اتحاد خمس أو ست أهرام رباعية الوجوه.

يجب القيام بالتقسيم كما يفترض علينا تابع التمايز كل ما أمكن ذلك. إذا لم يحقق الألوغاريتم كلا تابعي التمايز a للوجهين المتقابلين f_i و f_j عندها تبرز أهمية تابع التمايز $b(f_i , f_j)$. وكما ذكرنا سابقاً هناك تقسيمات لأوجه رباعي الوجوه دون أن يكون هناك تقسيم موافق لسداسي الوجوه إلى رباعيات وجوه.

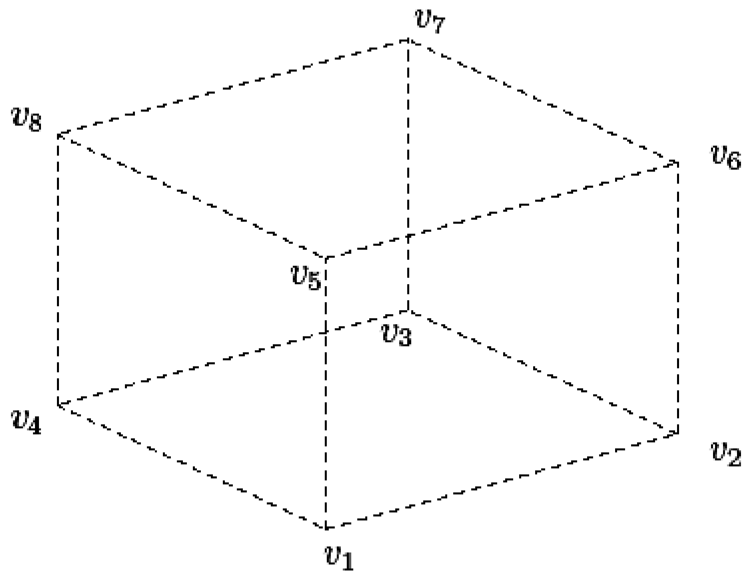
لندرس شبكة تتألف من سداسي أضلاع واحد هو h. الشبكة الهندسية سداسية الوجوه هنا هي H حيث $H = \{h\}$ ومن أجل السهولة سوف نعتبر أن سداسي الوجوه هذا هو عبارة عن المكعب الواحدي والذي هو مكعب طول ضلعه واحدة الأطوال أي $h = [0,1]^3$. جميع النتائج التي سنحصل عليها يمكن استخدامها في الحالات العامة الأخرى إذا لم توجد أي تعديلات تتعارض مع تطبيق هذه النتائج [٣]. سوف نرقم ذرى سداسي الوجوه كما هو مبين بالشكل (٣)، وبالتالي فإن ذرى وأحرف وأوجه وعناصر الشبكة سداسية الوجوه البسيطة جداً المبينة في الشكل (٣) يمكن كتابتها باستخدام الترميز السابق على الشكل التالي

$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$

$E = \{[v_1v_2], [v_2v_3], [v_3v_4], [v_4v_1], [v_5v_6], [v_6v_7], [v_7v_8], [v_8v_5], [v_1v_5], [v_2v_6], [v_3v_7], [v_4v_8]\}$

$F = \{ \{v_1,v_2,v_3,v_4\}, \{v_1,v_2,v_6,v_5\}, \{v_1,v_4,v_8,v_5\}, \{v_2,v_3,v_7,v_6\}, \{v_5,v_6,v_7,v_8\}, \{v_4,v_3,v_7,v_8\} \}$

$h = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$



الشكل (٣) ترقيم العقد (الذرى) V

أحرف الشبكة رباعية الوجوه الناتجة $E`$ أما أن تكون أحرفاً موجودة في الشبكة سداسية الوجوه أي $E \in e$ مثل الحرف $[v_1v_2]$ أو أن تكون أقطار في أوجه الشبكة السداسية $F \in f$ مثل القطر $[v_1v_3]$ أو أن تكون أقطار فراغية في سداسي الوجوه h مثل القطر $[v_1v_6]$.

سوف نميز بين ثلاثة نماذج محتملة من الأوجه (المثلثات) في $F`$ (أوجه الشبكة الرباعية) كما هو مبين بالشكل (4) [1].

النموذج الأول:

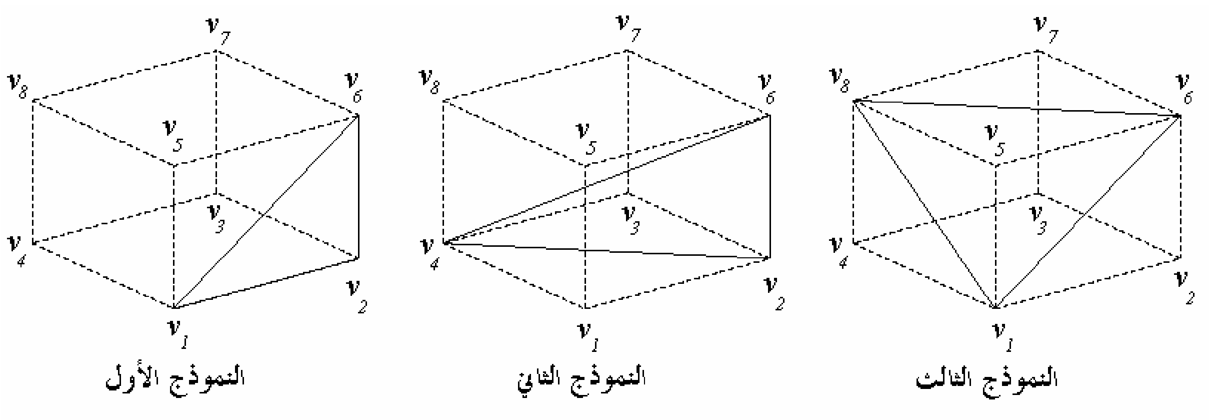
هو مثلث قائم متساوي الساقين والذي هو عبارة عن نصف أحد أوجه مجموعة الأوجه F (أوجه الشبكة السداسية) مثل المثلث $v_1v_2v_6$. الضلع الأول والثاني حرفين بأحد أوجه الشبكة السداسية والضلع الثالث قطر في هذا الوجه.

النموذج الثاني:

هو المثلث القائم الذي أحد أضلاعه حرف الشبكة السداسية والضلع الثاني قطر في أحد الأوجه والضلع الثالث هو قطر فراغي في سداسي الوجوه مثل المثلث $v_2v_4v_6$.

النموذج الثالث:

مثلث متساوي الأضلاع المعين بأقطار ثلاثة أوجه من الشبكة السداسية مثل المثلث $v_1v_6v_8$.



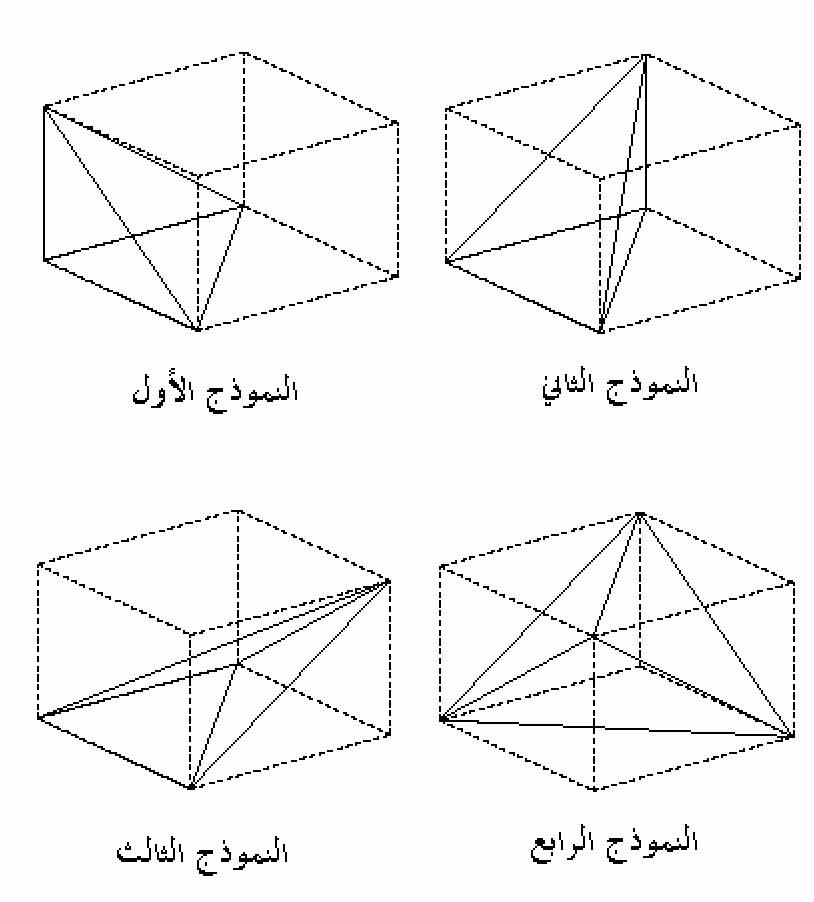
الشكل (٤) النماذج الثلاث للأوجه المثلثية

هنالك أربع نماذج من رباعيات الوجوه النظامية [4]. سوف نرمز لهذه النماذج النظامية بالأحرف A,B,C,D كما هو مبين بالشكل (5). نقول عن رباعي وجوه أنه رباعي وجوه نظامي إذا كانت أوجهه الأربعة هي مثلثات ناتجة وفق النماذج الثلاث التي عرفت سابقاً. النماذج A,B,C لها ثلاث ذرى واقعة في وجه واحد والذروة الرابعة واقعة في الوجه الموازي لهذا الوجه. رباعي الوجوه النظامي الوحيد الذي لا يملك وجهاً واقعاً على الحدود الخارجية للمكعب هو النموذج D. جميع الأحرف الستة للنماذج الأربعة السابقة هي عبارة عن أقطار لأوجه الشبكة الأصلية M، والجدول (1) يلخص خواص أوجه هذه النماذج الأربعة وحجمها والزاوية الأعظمية الكائنة بين الأوجه. الشكل (5) يبين مثالاً لكل نموذج من نماذج رباعيات الوجوه النظامية الأربعة A,B,C,D.

النموذج	عدد الأوجه (المثلثات) من النموذج	الحجم	φ_{max}

	الأول	الثاني	الثالث		
A	٣	٠	١	١/٦	90°
B	٢	٢	٠	١/٦	90°
C	١	٢	١	١/٦	125.26°
D	٠	٠	٤	١/٣	٧٠.٥٣°

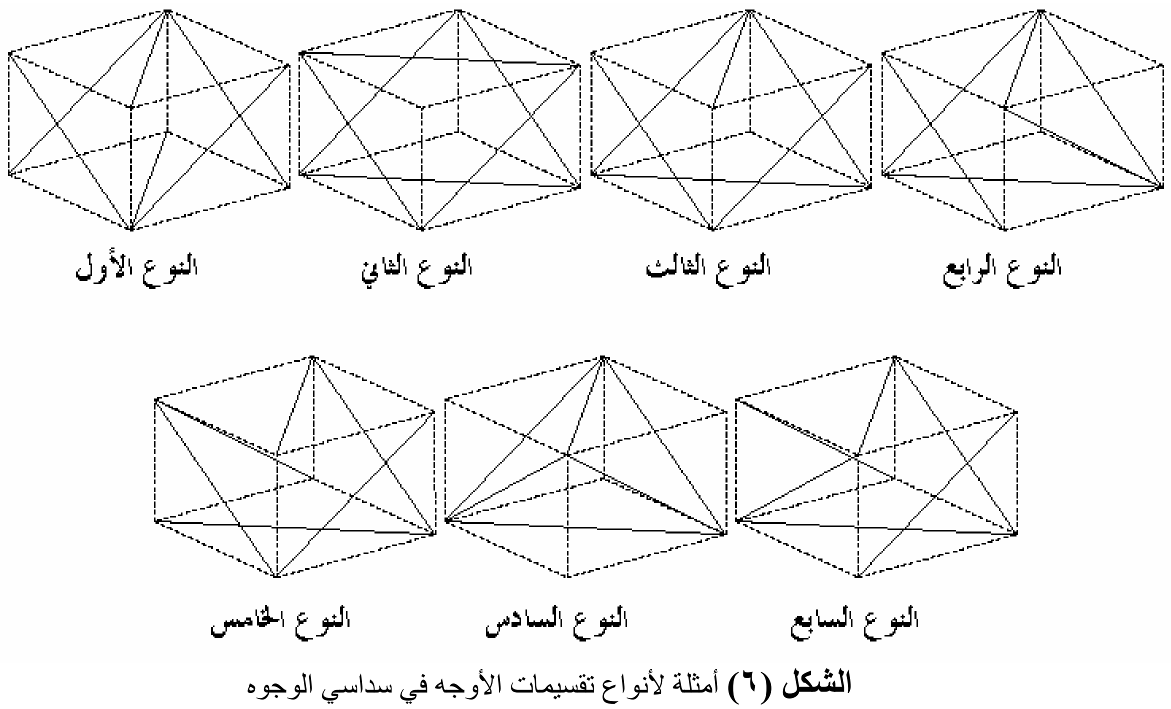
الجدول (١) خصائص النماذج الأربعة من رباعيات الوجوه المنتظمة



الشكل (٥) مثال لكل نموذج من نماذج رباعيات الوجوه النظامية

يمكن أن ندرس نموذجين آخرين من الأجسام الهندسية التي تمتلك أربع ذرى حيث اعتبرنا سداسي الوجوه مكعب حيث تكون هذه الذرى الأربعة واقعة في مستو واحد ولا تشكل رباعي أضلاع نظامي. في سداسيات الوجوه في الحالة العامة فإن هذه الذرى الأربع يمكن أن تصبح رباعي وجوه مع كون الزاوية العظمى تساوي تقريباً 180° وهو أمر غير مرغوب فيه في الشبكات الهندسية كونه يقلل من جودة الشبكة الهندسية. ولهذا السبب سوف لن ندعو مثل هذه الأجسام رباعيات وجوه نظامية وسوف نفترض أن الألغوريتم موضوع دراستنا يهمل مثل هذه الحالات [٢].

يمكن تقسيم أي وجه $f \in F$ إلى مثلثين وفق احتمالين. سوف نعبر عن المثلثين وفق الذرى المحددة للقطر الذي تم تقسيم الوجه بموجبه إلى مثلثين. عدد الاحتمالات الكلية لتقسيم الأوجه الستة لسداسي الوجوه F هو $2^6 = 64$. ويمكن تجميعها هذه الاحتمالات ضمن سبع أنواع. نقول عن تقسيمين لوجه ما أنهما ينتميان إلى نفس النوع إذا كان هناك تحويل هندسي يتم بموجبه تحويل جميع الأقطار الموجودة في التقسيم الأول إلى الأقطار الموجودة في التقسيم الثاني [١]. الشكل (6) يبين أمثلة من الأنواع السبعة والجدول (٢) يبين عدد تقسيمات الوجوه في كل نوع مع التقسيمات وفق بعض الأقطار (مع العلم أنه لم نورد تسميات كافة لكبر عددها).



الشكل (٦) أمثلة لأنواع تقسيمات الأوجه في سداسي الوجوه

النوع	التكرار	أمثلة (يتم تعريف التقسيم عن طريق أقطار المثلثات الناتجة)					
١	٤	$[v_1v_3]$	$[v_5v_7]$	$[v_1v_6]$	$[v_2v_7]$	$[v_4v_7]$	$[v_1v_8]$
٢	٤	$[v_2v_4]$	$[v_6v_8]$	$[v_1v_6]$	$[v_2v_7]$	$[v_4v_7]$	$[v_1v_8]$
٣	٢٤	$[v_2v_4]$	$[v_5v_7]$	$[v_1v_6]$	$[v_2v_7]$	$[v4v_7]$	$[v_1v_8]$
٤	١٢	$[v_2v_4]$	$[v_5v_7]$	$[v_2v_5]$	$[v_2v_7]$	$[v_4v_7]$	$[v_1v_8]$
٥	١٢	$[v_2v_4]$	$[v_5v_7]$	$[v_1v_6]$	$[v_2v_7]$	$[v_3v_8]$	$[v_1v_8]$
٦	٢	$[v_2v_4]$	$[v_5v_7]$	$[v_2v_5]$	$[v_2v_7]$	$[v_4v_7]$	$[v_4v_5]$
٧	٦	$[v_2v_4]$	$[v_5v_7]$	$[v_1v_6]$	$[v_2v_7]$	$[v_3v_8]$	$[v_4v_5]$

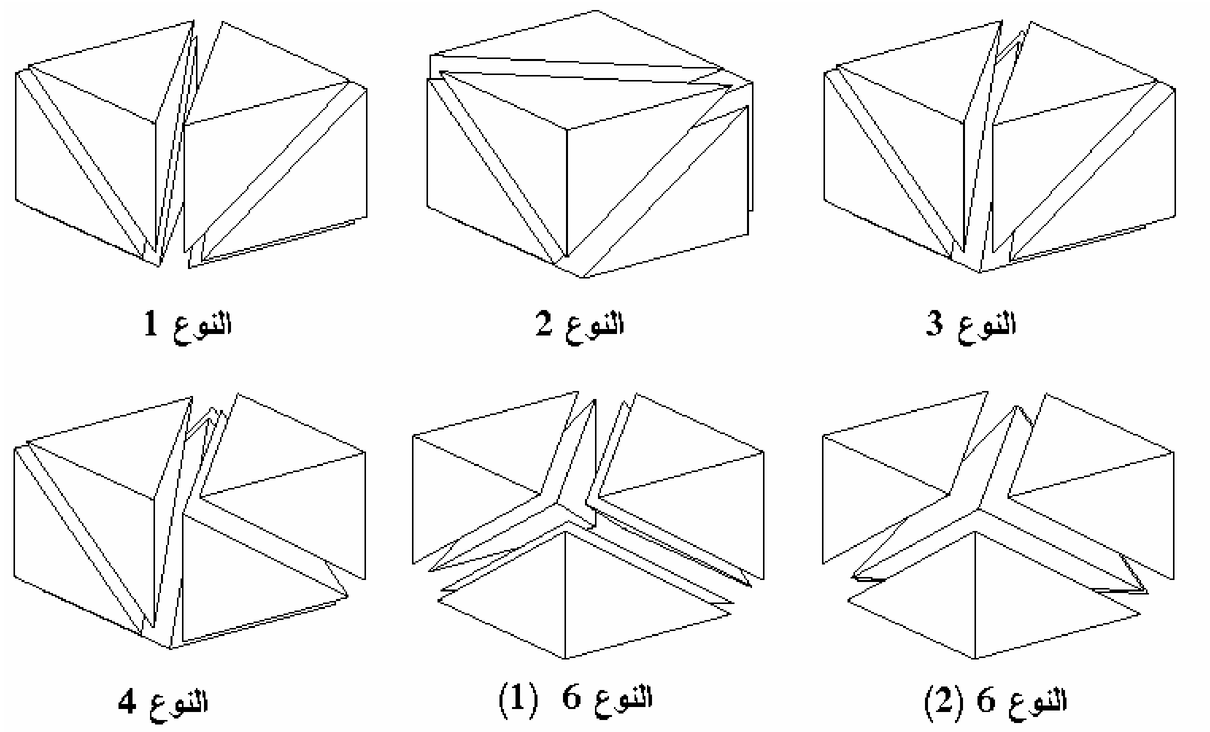
الجدول (٢) أنواع تقسيمات الأوجه

من أجل تقسيم معين للأوجه في عنصر h سداسي من النوع 1,2,3,4,6 هناك تقسيم للعنصر h إلى شبكة ذات رباعيات وجوه نظامية تتضمن تقسيمات الأوجه وفق الأنواع السابقة. فيما يخص تقسيمات الأوجه وفق النوعين 5,7 لا يوجد تقسيم لسداسي الوجوه يحقق الخاصية السابقة.

يمكن برهان ما سبق عن طريق دراسة شبكة مفروضة تتألف من مجموعة من الذرى ورباعيات الوجوه كما هو مضح في الجدول (٣) والشكل (7). هناك احتمالين مختلفين للتقسيم من أجل النوع ٦، والجدول (٤) يبين عدد التقسيمات الموجودة من أجل كل نوع بالإضافة إلى النموذج رباعيات الأضلاع الناتجة. نتيجة الدوران والانعكاس فقد تم الحصول على عدة احتمالات تم وضعها في سطر واحد.

النموذج	t_1	t_2	T_3	t_4	t_5	t_6
١	{1,2,3,7}	{1,3,4,7}	{1,2,7,6}	{1,5,6,7,}	{1,4,8,7}	{1,5,7,8}
٢	{1,2,4,6}	{2,3,4,7}	{1,5,6,8}	{1,4,8,6}	{2,4,6,7}	{4,6,7,8}
٣	{1,2,4,7}	{2,3,4,7}	{1,2,7,6}	{1,5,6,7}	{1,4,8,7}	{1,5,7,8}
٤	{1,2,4,7}	{2,3,4,7}	{1,2,7,5}	{2,5,6,7}	{1,4,8,7}	{1,5,7,8}
٦	{1,2,4,5}	{2,3,4,5}	{2,5,6,7}	{4,5,7,8}	{2,3,5,7}	{3,4,5,7}
٦	{1,2.4,5}	{3,2,7,4}	{6,5,7,2}	{8,7,5,4}	{1,3,8,6}	---

الجدول (٣) أمثلة عن التقسيمات من أجل تقسيم مفروض لأوجه. تم تعريف التقسيم عن طريق أرقام الذرى



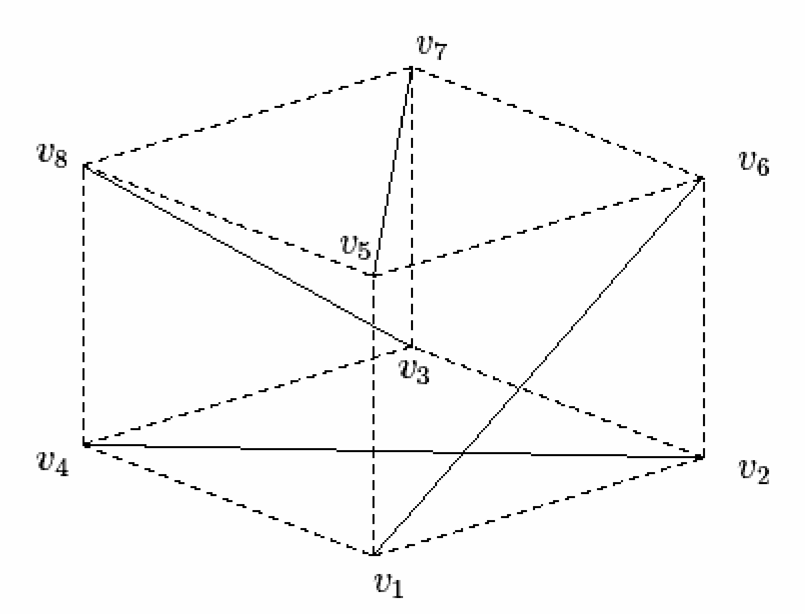
الشكل (٧) أمثلة عن التقسيمات من أجل تقسيم مفروض لأوجه

نوع تقسيم الوجه	عدد الاحتمالات	عدد رباعيات الوجوه من			
		النموذج A	النموذج B	النموذج C	النموذج D
١	١		٦		
٢	٣	٢	٢	٢	
٣	١	١	٤	١	
٤	٢	٢	٢	٢	
٦	٤	٣		٣	
٦	١	٤			١

الجدول (٤) عدد رباعيات الوجوه ونماذجها الخاصة بكل تقسيم من تقسيمات الأوجه

فيما يخص تقسيمات الأوجه من النوع 7 , 5 فإنه يمكننا اختيار أربع أقطار في أوجه سداسي الوجوه لا تشترك بأي نقطة، مثلاً الأقطار v_5v_7 , v_1v_6 , v_3v_8 كما هو موضح في الشكل (٨). سوف نفترض أن تقسيم سداسي الوجوه h إلى رباعيات وجوه نظامية سوف يتم بتقسيم الأوجه الموافقة وفق هذه

الأقطار وسيتم البرهان على ذلك بطريقة نقض الفرض. المثلث $v_1v_2v_6$ و v_i حيث $v_i \in \{v_3,v_4,v_7,v_8\}$. الخيار $i = 3$ يناقض تقسيم الوجه المؤلف من الذرى $v_1v_2v_3v_4$. الحالات الثلاث المتبقية تقتضي أن يكون أحد الأقطار الداخلية v_4v_6 أو v_1v_7 أو v_2v_8 تنتمي إلىE` (أحرف الشبكة رباعية الوجوه)، وبما



الشكل (٨) التقسيمات المتضاربة لأورب أوجه

أنه لا يمكن أن يكون هناك سوى قطر داخلي وحيد في E` فإن القطر $v3v5$ ليس أحد أحرف الشبكة الرباعية $E$` أي $[v3v5] \not\in E$`.

بإعادة تطبيق ما سبق على المثلثات $v_5v_6v_7$ و $v_3v_7v_8$ و $v_2v_3v_4$ فإننا سوف نستثني الأقطار الفراغية $[v_2v_8]$ و $[v_4v_6]$ و $[v_1v_7]$ بالترتيب، وبما أن ما سبق يناقض الفرض فإنه تم البرهان على أنه من أجل تقسيم معين لأوجه سداسي الوجوه وفق النوع 1,2,3,4,6 يوجد هناك تقسيم للشبكة السداسية إلى عدد من رباعيات الوجوه النظامية تتضمن تقسيمات للأوجه وفق الأنواع 1,2,3,4,6.

سنعرف بعض الرموز المفيدة عند التعامل مع شبكات العناصر المحدودة المؤلفة من عنصر أو أكثر من أجل سداسي وجوه h. سنعرف زوج الوجوه p الذي يتألف من وجهين غير متجاورين في h. في الحالة الخاصة التي يكون فيها سداسي الوجوه مكعب فإن هذه الأزواج (الثنائيات) ما هي إلا الأوجه المتقابلة المتوازية، وهناك ثلاث أزواج من الوجوه لكل سداسي وجوه. من أجل كل تقسيم للوجه هناك قطري تقسيم هما $[v_iv_j]$ و $[v_kv_l]$ وذلك من أجل زوج أوجه p. نقول عن الزوج p أنه مقسم عكسياً إذا كانت الذرى $\{v_i,v_j,v_k,v_l\}$ هي عبارة عن رباعي وجوه من النموذج D، وإلا فإننا سندعو هذا الزوج بأنه مقسم بشكل متوازي. في الحالة الأولى فإننا نقول عن رباعي الوجوه $\{v_i,v_j,v_k,v_l\}$ أنه رباعي أضلاع

موجه للزوج p. نلاحظ أنه هناك احتمالين فقط لرباعي الوجوه الموجه، وبالتالي يمكن إعادة صياغة ما سبق إذا أخذنا بعين الاعتبار جميع أنواع تقسيم وجوه رباعي الوجوه h.

وهكذا نستنتج أنه من أجل أحد تقسيمات الوجوه فإنه يوجد هناك تقسيم لسداسي الوجوه h إلى رباعيات وجوه نظامية (تتضمن نفس تقسيم الوجه) فقط وفقط إذا كانت جميع أزواج الأوجه المقسمة عكسياً تعطي نفس رباعي الوجوه الموجه.

النتائج والاستنتاجات

في هذا البحث تعرفنا على ألغورتيم مفيد وفعال من أجل تحويل الشبكات الهندسية المشكلة من عناصر سداسية الوجوه إلى شبكات هندسية مشكلة من عناصر هرمية رباعية الوجوه و الشبكات الناتجة تحقق شروط ومعايير التطابق الهندسية دون زيادة عدد العقد في الشبكة.

لهذا الألغورتيم أهمية خاصة عند دراسة شبكات العناصر المحدودة الفراغية في عدة ميادين هندسية مثل مسائل التحليل الإنشائي عند دراسة التشوهات والإجهادات، ومسائل الجريان الهيدروليكي، ومسائل التصميم الميكانيكي وغيرها من المسائل الهندسية الأخرى. وما يميز هذا الألغورتيم عن غيره أنه لا يتضمن زيادة في عدد العقد وبالتالي فإن عدد المجاهيل في شبكة العناصر المحدودة سوف لن يزداد ولا يرافق هذا الأمر أي زيادة ملحوظة في زمن وجهد الحساب مع احتمال ازدياد دقة النتائج المحصول بسبب زيادة عدد العناصر المحدودة المستخدمة في نمذجة المسألة المدروسة حيث أننا رأينا كيف يتم تقسيم كل عنصر سداسي الوجوه إلى عدة عناصر رباعية الوجوه، هذا من جهة، ومن جهة أخرى قد يرغب المهندس أن يقوم بإعداد نموذج حاسوبي للمسألة التي يريد دراستها عن طريق شبكة عناصر محدودة رباعية الوجوه وذلك انطلاقاً من شبكة عناصر محدودة سداسية الوجوه، إما من أجل مقارنة النتائج ما بين الشبكتين أو بسبب كون العناصر المحدودة رباعية الوجوه هي الأكثر ملاءمة لنمذجة المسألة المدروسة. مع العلم أن إيراد الأمثلة التطبيقية هنا لن يفيد في إيضاح هذا الألغوريتم، ويمكن للباحثين في مجال التحليل الإنشائي أو مسائل الجريان الهدروليكي أو مسائل تصميم قطع الآلات الميكانيكية تجربة هذا الألغوريتم على مسائل تطبيقية وعملية.

Transforming Of Hexahedral Geometrical Meshes Into Pyramid Tetrahedral Geometrical Meshes

Abstract

In this research we will study how to transform geometrical hexahedral meshes into geometrical tetrahedral meshes by a special algorithm for this operation.

The main merit of this algorithm is that it performs the transformation without adding new nodes on the original given mesh. We will start from a very simple hexahedral mesh which is one hexahedron, and for more simplicity we will assume that this simple hexahedron is the unit cube, which has edges of unit length and we will generalize the obtained results to meet the hexahedral meshes in its general form.

We will define three types of triangles drawn within hexahedrons, and afterwards we will define the proper tetrahedron. We will prove that it is possible to subdivide four types of proper tetrahedrons from hexahedrons and we will list the properties of these types. Lastly we will study seven types of face partitions in hexahedrons, and we will concentrate on five types used when transforming hexahedral meshes to tetrahedral meshes.

المراجع العلمية

1. *Angel Plaza and Marya-Cecilia Rivara*, "**Mesh Refinement Based On The 8-Tetrahedra Longest-Edge Partition**", University of Las Palmas de Gran Canaria.

2. *Jonathan Richard Shewchuk*, "**Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation**", University of California at Berkeley, september 1999, pp. 5,21-23.

3. *Steven E. Benzley, Ernest Perry, Karl Merkley and Brett Clark*, "**A Comparison of All Hexagonal and All Tetrahedral Finite Element Meshes for Elastic and Elasto-plastic Analysis**", Brigham Young University and Sandia National Laboratories, pp.2-4.

4. *J. P. Suarez, G.F. Carey, A. Plaza and M. A. Padron*, "**Graph Based Data Structures For Skeleton Based Refinement Algorithms**", University of Las Palmas de Gran Canaria, Canary Islands, Spain and University of Texas at Austin, Austin, Texas, U.S.A., pp. 1-12.

٥. *د.م. تيسير خليل*، "**زيادة عدد وحجم العناصر السداسية الوجوه في الشبكات عن طريق التحويلات الهندسية**"، مجلة جامعة البعث، المجلد السادس والعشرون، ٢٠٠٤.