# إيجاد تقاطعات المحال الهندسية للأجسام الفراغية باستخدام الهندسة الوصفية – حالة الأسطوانة مثالاً•


**ملخص البحث**

خلال عملية التصميم الهندسي، قد يضطر المصمم في مجالات الهندسة المختلفة (المدنية – المعمارية – الميكانيكية) إلى استخدام المحال الهندسية لبعض الأجسام خصوصاً تلك الأجسام الخاضعة لقيود تتعلق بشكلها وأبعادها.

لقد قمنا في هذا البحث بدراسة تقاطعات المحال الهندسية للأجسام الفراغية باستخدام الهندسة الوصفية عوضاً عن الطرق الحسابية والتحليلية المستخدمة عادةً. تم التعبير عن ناتج التقاطع كمحل هندسي وصولاً إلى حل نهائي تخطيطي يتمتع بالوضوح والسهولة وقابلية التطبيق، وهو ما يهم المهندس المصمم.



• د.م. تيسير خليل – أستاذ في قسم العلوم الأساسية بكلية الهندسة المدنية

م. رغيد عبد الصمد – عضو هيئة فنية في كلية الهندسة المدنية

م. غادة المحمد – مدرسة في المعهد التقاني الهندسي

# إيجاد تقاطعات المحال الهندسية للأجسام الفراغية باستخدام الهندسة الوصفية – حالة الأسطوانة مثالاً

**1- أساسيات:**

إن الغاية من الهندسة الوصفية هي تطوير التصور الفراغي من أجل استخدامها في التمثيل المستوي للأجسام ثلاثية الأبعاد، ولهذا فإن دراسة المحال الهندسية هو أمر في غاية الأهمية من أجل القدرة على تخيل الخصائص الهندسية المتعلقة لبعض جوانب المسألة. إن استخدام المحال الهندسية كطريقة لحل بعض مسائل الإنشاءات الهندسية هو أمر ذو أهمية في الكثير من المجالات التطبيقية المتعلقة بالتصميم الهندسي.

يتم تعريف المحل الهندسي على أنه مجموعة النقاط $\{L\}$ والتي لها خصائص نوعية مشتركة.

إن أول من استخدم مصطلح المحل الهندسي هو إقليدس في كتابه الشهير "العناصر"، وتم تطوير هذا المفهوم على يد كل من فيثاغورث وأرسطو فيما بعد.

إن مسألة المحل الهندسي يتم حلها عن طريق تحديد المكونات الثلاث التالية:

- المجموعة $\{E\}$ للعناصر الثابتة فراغياً.
- المجموعة $\{K\}$ للثوابت الجبرية والشعاعية.
- الخاصية $f$ المتعلقة بالمجموعتين $\{E\}$ و $\{K\}$ والتي يجب برهانها عن طريق نقاط المحل الهندسي $\{L\}$.

تدرس الهندسة الوصفية السطوح الهندسية من عدة جوانب: التمثيل – التقاطع – الفصل المشترك – النشر – ... كما هو في المراجع 1,2,4,6.

إن تحليل بعض الأسطح الشهيرة يمكننا بسهولة من تعريف خصائصها على أنها محل هندسي. إن الخاصية $f$ التي تعرف بعض هذه الأسطح يمكن سردها ضمن

الحالات التالية:

<u>الحالة 1-a</u>: المستوي $[P]$ هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $d$ عن مستوٍ آخر $[Q]$ معلوم هو مقدار ثابت، وهنا يكون $\{E\} = \{[Q]\}$ ، $\{K\} = \{d\}$.

<u>الحالة 1-b</u>: المستوي هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط الثابتة البعد عن نقطتين ثابتتين $A$ ، $B$ وتكون هذه المسافة هي $d$ (أي أنها الناظم العمودي على المستوي)، وهنا يكون $\{E\} = \{[A,B]\}$ ، $\{K\} = \{d\}$.

<u>الحالة 1-c</u>: المستوي هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن جانبي ثنائي سطوح زاويته $\alpha$ ومعرف بالمستويين $[P]$ ، $[Q]$ ، وهنا يكون $\{E\} = \{[P], [Q]\}$ ، $\{K\} = \{\alpha\}$.

<u>الحالة 2-a</u>: الأسطوانة الدورانية هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $r$ عن مستقيم ثابت $D$ (في هذه الحالة يكون محور الأسطوانة هو $D$ ونصف قطرها $r$) ، وهنا يكون $\{E\} = \{D\}$ ، $\{K\} = \{r\}$.

<u>الحالة 2-b</u>: الأسطوانة الدورانية هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $r$ هو مقدار ثابت عن السطح الخارجي لأسطوانة دورانية أخرى $(C)$ نصف قطرها $R$ والأسطوانتين مشتركتين بنفس المحور الطولي، وهنا يكون $\{E\} = \{(C)\}$ ، $\{K\} = \{r\}$.

<u>الحالة 3</u>: المخروط الدوراني هو المحل الهندسي لمجموعة المستقيمات المارة عبر نقطة ثابتة $V$ (والتي ندعوها رأس المخروط) وتنتمي إلى مستقيم ثابت $D$ وتصنع هذه المستقيمات زاوية $\alpha$ مع المستقيم $D$ (والذي ندعوه المحور الطولي للمخروط) ، وهنا يكون $\{E\} = \{D,V\}$ ، $\{K\} = \{\alpha\}$.

<u>الحالة 4-a</u>: الكرة هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $r$ عن نقطة ثابتة $O$ هو مقدار ثابت (ندعو النقطة $O$ مركز الكرة) ، وهنا يكون $\{E\} = \{O\}$ ، $\{K\} = \{r\}$.

<u>الحالة 4-b</u>: الكرة هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $r$ هو مقدار ثابت عن كرة أخرى معطاة $(S)$ نصف قطرها R، وهنا يكون $\{E\} = \{(S)\}$ ، $\{K\} = \{r\}$.

في هذا البحث سوف ندرس مسائل المحال الهندسية وسوف نستخدم الهندسة الوصفية لحل تقاطع المحال الهندسية.

إن البذور الأولى للفكرة النظرية المستخدمة وردت في بعض الأعمال البحثية كتلك الواردة في المراجع 2,3,4، أما طريقة الترميز المستخدمة في هذا البحث فهي متوافقة مع الرموز الواردة في المراجع 5,6,7.

**2- تقاطع أسطوانة دورانية ومستو:**

لنفرض أنه لدينا أسطوانتين دورانيتين $(C_1)$ و $(C_2)$ مشتركتين بالمحور الطولي وقاعدتهما تقع في المستوي الأفقي للإسقاط ونصفي قطريهما $r_1$ و $r_2$ على الترتيب، ولنفرض مستوياً ثابتاً هوالمستوي $[P]$، كما هو مبين في الشكل (1). سوف نقوم بإيجاد المحل الهندسي لمجموعة النقاط متساوية البعد عن الأسطوانتين وعن المستوي.

في هذه الحالة إن مجموعة العناصر الثابتة $\{E\}$ تتألف من الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ بالإضافة إلى المستوي $[P]$ ومجموعة الثوابت هي $\{K\} = \{r_1,r_2\}$.

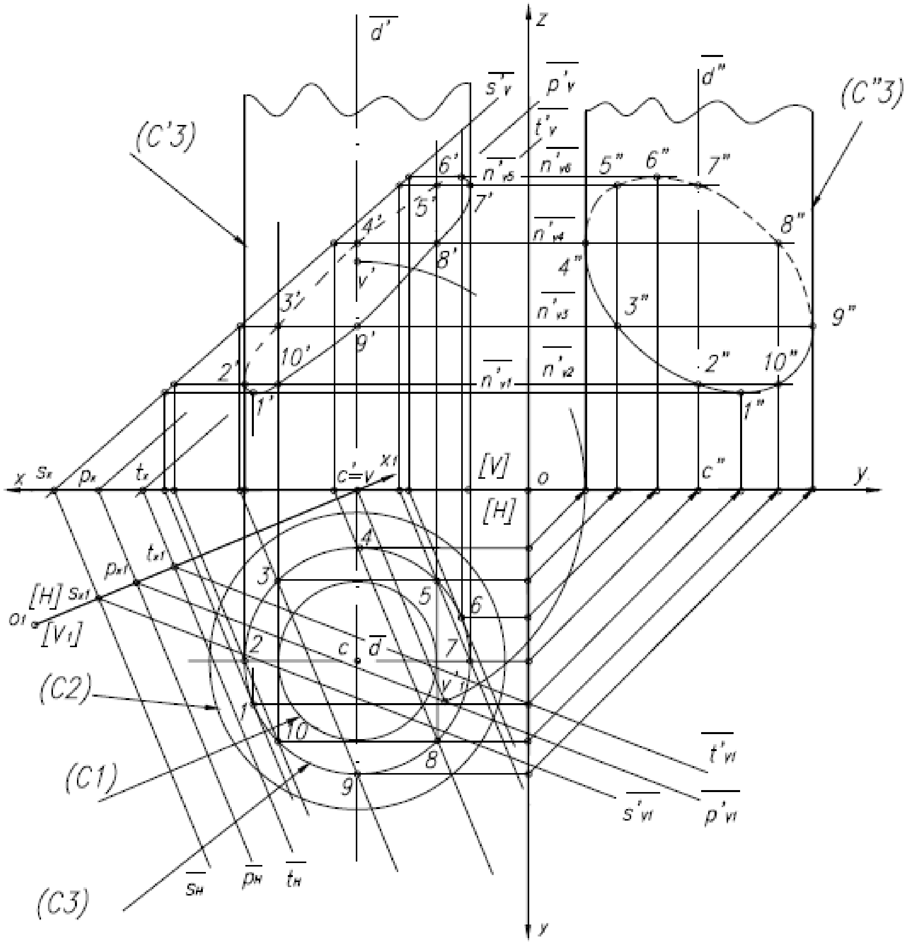
بالعودة إلى التعريف 2-b الوارد في الأساسيات، فإن المحل الهندسي لمجموعة النقاط ثابتة البعد عن الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ هو الأسطوانة الدورانية $(C_3)$ التي تشترك مع الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ بنفس المحور الطولي والتي نصف قطرها $r_3 = (r_1 + r_2) / 2$. في المقابل، وبالعودة إلى التعريف 1-a الوارد في الأساسيات، فإن الحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن المستوي $[P]$ يتألف من جملة المستويين المتوازيين $[S]$ و $[T]$ الموازيين للمستوي $[P]$ والمتساويي البعد عنه، كما يبين الشكل (1).

وبما أن البعد بين نقطة تقع على الأسطوانة $(C_3)$ و بين الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ هي $d = (r_2 - r_1) / 2$، فإننا نستنتج أن المسافة بين المستوي $[P]$ من جهة والمستويين $[S]$ و $[T]$ من جهة أخرى هي أيضاً $d = (r_2 - r_1) / 2$.

إن المحل الهندسي المطلوب سوف يتألف من منحنيي التقاطع الكائنين بين الأسطوانة $(C_3)$ من جهة والمستويين $[S]$ و $[T]$ من جهة أخرى. أي أن المحل الهندسي هو القطعين الناقصين الناتجين عن قطع الأسطوانة $(C_3)$ بالمستويين $[S]$ و $[T]$.

يبين الشكل (1) المساقط الثلاثة العمودية للقطع الناقص الناتج عن عملية قطع

الأسطوانة ($C_3$) بالمستوي [$S$] فقط. النقاط المعرفة لهذا القطع الناقص تم الإشارة إليها في المسقط الأفقي بـ ($1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$).



**الشكل (1)** تقاطع أسطوانة دورانية ومستو

من أجل تمثيل المستويين [$S$] و [$T$] قمنا بعملية تغيير المستوي الجبهي للاسقاط. اخترنا جملة المستويات الجديدة [$H$] و [$V_1$] سوف يكون المستوي [$P$] عمودياً على مستوي الإسقاط الجبهي الجديد [$V_1$].

تم تحديد الأثرين الجبهيين $s'_{V1}$ و $t'_{V1}$ للمستويين [$S$] و [$T$] على مستوي الإسقاط الجبهي الجديد على اعتبار أن المسافتين بين الأثرين $s'_{V1}$ و $t'_{V1}$ من جهة والأثرين $t'_{V1}$ و $p'_{V1}$ من جهة أخرى يجب أن يكونا متساويين ويساويان المقدار $d = (r_2 - r_1) / 2$.

بالتدوير العكسي لهذه الآثار، فإننا نحصل على الآثار $s_H$ ، $s'_V$ ، $t_H$ ، $t'_V$.

إن قطع الأسطوانة $(C_3)$ بالمستوي $[S]$ المحدد بأثريه $(s_H\ ,\ s'_V)$ سوف يقودنا إلى القطع الناقص الذي مساقطه الثلاثة محددة بمجموعة النقاط:

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$

$(1'\ 2'\ 3'\ 4'\ \ 5'\ 6'\ 7'\ 8'\ 9'\ 10')$

$(1''\ 2''\ 3''\ 4''\ 5''\ 6''\ 7''\ 8''\ 9''\ 10'')$

وهذا ما يمثل الحل الأول للمسألة المدروسة. للحصول على الحل الثاني، نكرر الخطوات السابقة وصولاً إلى القطع الناقص الناتج عن قطع الأسطوانة $(C_3)$ بالمستوي $[T]$ عوضاً عن $[S]$.

**3- تقاطع أسطوانتين دورانيتين:**

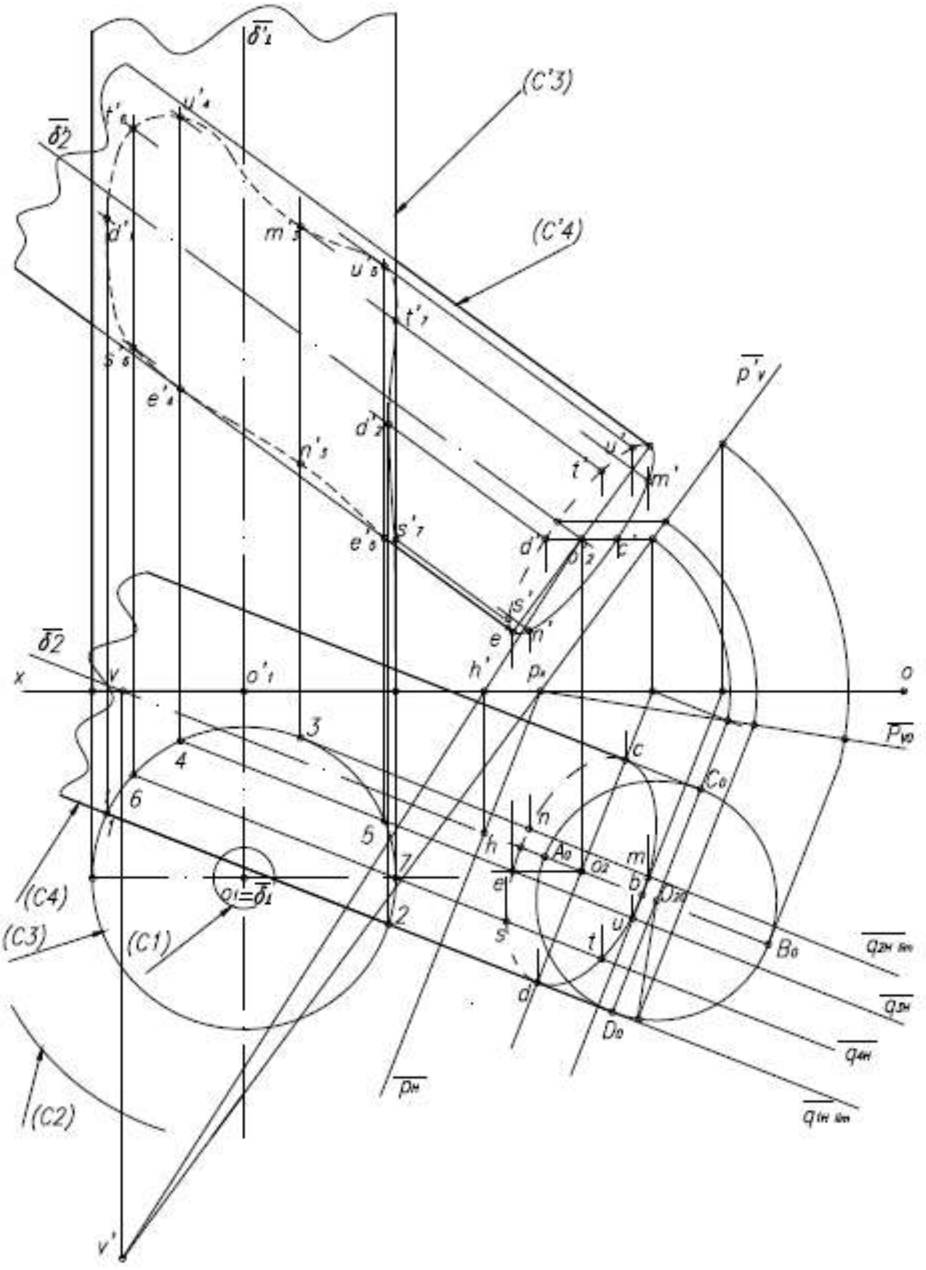
لنفرض أنه لدينا أسطوانتين دورانيتين $(C_1)$ و $(C_2)$ مشتركتين بالمحور الطولي $\Delta_1$ ولنفترض مستقيماً ثابتاً $\Delta_2$. سوف نقوم بإيجاد المحل الهندسي لمجموعة لنقاط المتساوية البعد عن الأسطوانتين وعن المستقيم $\Delta_2$، كما يبين الشكل (2).

في هذه الحالة إن مجموعة العناصر الثابتة $\{E\} = \{(C_1),(C_2),\Delta_2\}$ ومجموعة الثوابت هي $\{K\} = \{r_1,r_2\}$.

بالعودة إلى التعريف 2-b الوارد في الأساسيات، فإن المحل الهندسي لمجموعة النقاط ثابتة البعد عن الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ ما هو إلا أسطوانة دورانية أيضاً $(C_3)$ تشترك مع الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ بنفس المحور الطولي ويكون نصف قطرها $r_3 = (r_1 + r_2) / 2$. وبالعودة إلى التعريف 2-a الوارد في الأساسيات، فإن المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تبعد مسافة $r_4$ عن المستقيم الثابت $\Delta_2$ هي الأسطوانة الدورانية $(C_4)$ والتي محورها الطولي $\Delta_2$ ونصف قطرها $r_4$. وبما أن بعد نقطة تقع على الأسطوانة $(C_3)$ عن الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ هو $d = (r_2 - r_1) / 2$، فإننا نستنتج إن نصف قطر الأسطوانة $(C_4)$ سوف يكون $r_4 = d = (r_2 - r_1) / 2$.

إن المحل الهندسي المطلوب إيجاده هو منحني التقاطع ما بين الأسطوانتين $(C_3)$ التي نصف قطرها $r_3 = (r_1 + r_2) / 2$ ومحورها الطولي $\Delta_1$ والأسطوانة $(C_4)$ التي

نصف قطرها $r_4 = (r_2 - r_1) / 2$ ومحورها الطولي $\Delta_2$.




**الشكل (2)** تقاطع أسطوانتين دورانيتين

يبين الشكل (2) المسقطين العموديين لمنحني التقاطع الكائن بين الأسطوانتين ($C_3$)

و $(C_4)$.

تم اختيار المستوي $[P]$ المار من قاعدة الأسطوانة $(C_4)$ بشكل كيفي مع ملاحظة التعامد الكائن بين المستوي $[P]$ والمستقيم $\Delta_2$. إن نصف قطر الدائرة الأساسية في الأسطوانة $(C_4)$ هو $r_4 = (r_2 - r_1) / 2$ وذلك في الوضعية الجديدة لمستوي القاعدة بعد التدوير علماً أنه تم الإشارة إلى الأثر الجبهي للمستوي $[P]$ بـ $p_{V0}$ ولمركز الدائرة الرئيسية بـ $O_{20}$.

إن منحني التقاطع $(D_1\ S_6\ E_4\ N_3\ E_5\ S_7\ D_2\ T_7\ U_5\ M_3\ U_4\ T_6\ D_1)$ ما بين الأسطوانتين $(C_3)$ و $(C_4)$ تم تحديده بالإستعانة بمستويات جبهية مساعدة آثارها الأفقية $q_{1H\ lim}$ ، $q_{2H\ lim}$ ، $q_{3H}$ و $q_{4H}$. إن كل هذه المستويات تقطع بنفس الوقت كلا قاعدتي الأسطوانتين $(C_3)$ و $(C_4)$ وتقاطع هذه المستويات والأسطوانتين يتألف من عدد من المولدات المشتركة بنقطة واحدة والتي تعرف نقاط منحني التقاطع.

في الشكل (2) تم الإشارة إلى النقاط المعرفة للمسقط الجبهي لمنحني التقاطع فقط، ويمكننا أن نلاحظ أن المسقط الأفقي لهذا المنحني يتطابق مع قوس الدائرة الرئيسية للأسطوانة $(2\ 7\ 5\ 3\ 4\ 6\ 1)$. أما في المسقط الجبهي فإن القسم $(s'_7\ d'_2\ t'_7)$ من منحني التقاطع هو القسم المرئي فقط من هذا المنحني.

وكنتيجة نهائية، فإن منحني التقاطع والذي مسقطه الأفقي $(2\ 7\ 5\ 3\ 4\ 6\ 1)$ ومسقطه الجبهي $(d'_1\ s'_6\ e'_4\ \ldots\ t'_6\ d'_1)$ ما هو إلا حل هذه المسألة.

**4- تقاطع أسطوانة دورانية وكرة:**

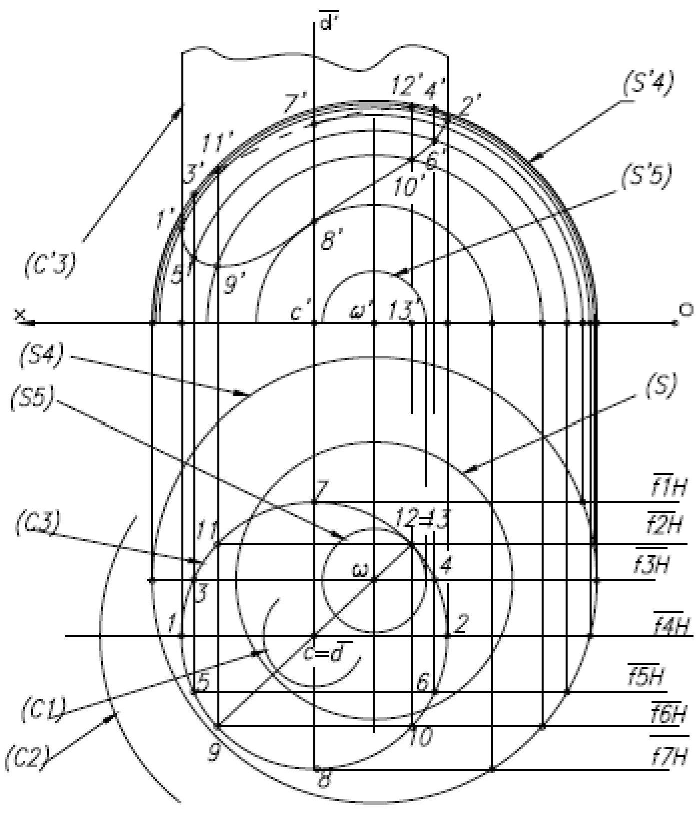
لنفرض أنه لدينا أسطوانتين دورانيتين $(C_1)$ و $(C_2)$ مشتركتين بالمحور الطولي $D(d,d')$ ونصفي قطريهما $r_1$ و $r_2$ على الترتيب ولنفترض أيضاً أنه لدينا الكرة $(S)$ التي نصف قطرها $R$. سوف نقوم بإيجاد المحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن الأسطوانتين وعن الكرة، كما يبين الشكل (3).

في هذه الحالة إن مجموعة العناصر الثابتة $\{E\} = \{(C_1),(C_2),(S)\}$ ومجموعة الثوابت هي $\{K\} = \{r_1,r_2,R\}$.

بالعودة إلى التعريف 2-b الوارد في الأساسيات، فإن المحل الهندسي لمجموعة النقاط ثابتة البعد عن الأسطوانتين الدورانيتين $(C_1)$ و $(C_2)$ هو الأسطوانة الدورانية $(C_3)$

المشتركة معهما بنفس المحور الطولي والتي نصف قطرها $r_3 = (r_1 + r_2) / 2$. وبالعودة إلى التعريف 4-b الوارد في الأساسيات، فإن الحل الهندسي لمجموعة النقاط التي بعدها $a$ عن الكرة المفروضة $(S)$ يتألف من كرتين $(S_4)$ و $(S_5)$ المشتركتين بنفس المركز مع الكرة $(S)$ والتي نصفي قطريهما $r_4 = R + a$ و $r_5 = R - a$ على الترتيب. وبما أن بعد نقطة تقع على الأسطوانة $(C_3)$ عن الأسطوانتين $(C_1)$ و $(C_2)$ هو $d = (r_2 - r_1) / 2$، فإننا نستنتج أن $a = d$ وأن نصفي قطري الكرتين $(S_4)$ و $(S_5)$ سيكونا $r_4 = R + (r_2 - r_1) / 2$ و $r_5 = R - (r_2 - r_1) / 2$ على الترتيب.

المحل الهندسي المطلوب إيجاده هو عبارة عن منحني التقاطع الكائن بين الأسطوانة $(C_3)$ والكرتين $(S_4)$ و $(S_5)$.




**الشكل (3)** تقاطع أسطوانة دورانية وكرة

يبـــين

الشكل (3) المسقطين العموديين لمنحني التقاطع المطلوب بين الأسطوانة ($C_3$) التي محورها الطولي $D(d,d')$ والي قاعدتها الرئيسية هي الدائرة التي مركزها $C(c,c')$ من جهة وبين الكرة ($S_4$) فقط التي مركزها $\Omega(\omega,\omega')$ الواقعة في مستوي الإسقاط الأفقي.

إن منحني التقاطع

$(1\ 3\ 11\ 7\ 12\ 4\ 2\ 6\ 10\ 8\ 9\ 5\ 1,\ 1'\ 3'\ 11'\ 7'\ 12'\ 4'\ 2'\ 6'\ 10'\ 8'\ 9'\ 5'\ 1')$ الكائن بين الأسطوانة ($C_3$) والكرة ($S_4$) تم تحديده باستخدام سبعة مستويات جبهية مساعدة آثارها الأفقية $f_{1H}$ ، $f_{2H}$ ، ... ، $f_{7H}$ على الترتيب، وهذه المستويات المساعدة السبعة تتقاطع مع مولدات الأسطوانة والكرة ويكون ناتج التقاطع عبارة عن دوائر. نقاط التقاطع ما بين المولدات والدوائر آنفة الذكر والتي تنتمي إلى نفس المستوي الجبهي تعرف منحني التقاطع المطلوب.

يمكننا أن نلاحظ إن المسقط الأفقي لهذا المنحني يتطابق مع الدائرة الرئيسية للأسطوانة ($C_3$) وأن القسم المرئي من مسقطه الجبهي هو فقط $(2'\ 6'\ 10'\ 8'\ 9'\ 5'\ 1')$.

في الشكل (3) تم تمثيل نصف الكرة ($S_4$) فقط، وإذا مثلنا كامل الكرة فإننا سوف نحصل على منحني تقاطع آخر يناظر المنحني الذي حصلنا عليه سابقاً بالنسبة لمستوي الإسقاط الأفقي.

تم اختيار الإحداثيات في هذه المسألة بحيث تكون الكرة ($S_5$) هي المماس الداخلي للأسطوانة ($C_3$)، وفي هذه الحالة فإن تقاطع الأسطوانة ($C_3$) الكرة ($S_5$) ما هو إلا نقطة وحيدة وهذه النقطة هي $(13,13')$ وهي نقطة تماس الدائرة الرئيسية في الأسطوانة ($C_3$) مع الدائرة العظمى للكرة ($S_5$) وذلك في مستوي الإسقاط الأفقي.

وكنتيجة نهائية، فإننا نجد أن حل هذه المسألة يتألف من منحنيات التقاطع ما بين الأسطوانة ($C_3$) والكرة ($S_4$) بالإضافة إلى النقطة $(13,13')$ وهي نقطة التماس بين الأسطوانة ($C_3$) والكرة ($S_5$).

**5- النتائج:**

في هذا البحث بينا قدرة الهندسة الوصفية على حل المسائل الفراغية المتعلقة بالمحال الهندسية بطرق تخطيطية وبشكل بسيط وواضح وقابل للتطبيق بعد أن كان حلها بالطرق

الحسابية والتحليلية الأكثر شيوعاً.

تم إيضاح فكرة الحل التخطيطي من خلال ثلاثة أمثلة قمنا بتحليلها وتحديد ناتج التقاطع وفق مفهوم المحل الهندسي باستخدام الهندسة الوصفية.

إن حل مثل هذه المسائل بالطرق الحسابية التقليدية يقودنا إلى جملة معقدة من المعادلات الجبرية حلها ليس أقل تعقيداً من صياغتها. في المقابل، فإن الهندسة الوصفية تقدم لنا حلاً تخطيطياً واضحاً وسهلاً، مع الميزة الإضافية المتمثلة في التخيل الفراغي للحل وتمثيله على المخططات.

تكمن أهمية هذا البحث بما يقدمه من أدوات مساعدة للمصممين في مجالي الهندسة المدنية والمعمارية لحل مسائل التقاطعات في القبب والأقواس والأسطوانات والكرات وغيرها، إضافة إلى مجال الهندسة الميكانيكية في مساعدة المصممين على تصميم الميكانيزمات والقطع الفراغية للحالات التي تكون فيها العناصر المتحركة خاضعة لقيود تتعلق بالشكل الهندسي والأبعاد.

**المراجع العلمية**


1. **F. G. Higbee** . " *The Essentials of Descriptive Geometry* ", New York , John Willy & Sons Inc. , pp: 220-٢٣٢, 2000.

٢. **N.N. Mihăileanu**. " *Complemente de geometrie sintetică* ",Bucureşti, 1995.

٣. **D. Brânzei**. " *, Geometrie circumstanţială* " , Iaşi, 1983.

٤. **W. M. Minifie** . " *A Text Book of Geometrical Drawing* " , New York , D. Van Nostrand Publications , pp: 350-377, 1996.

٥. **A.Tănăsescu**. " , *Geometrie descriptivă, perspectivă* " , English translation, Editura Didactică şi, 1999.

6. **F. G. Higbee** . " *The Essentials of Descriptive Geometry* ", New York , John Willy & Sons Inc. , pp: 220-٢٣٢, 2000.

7. **D. A. Low** . " *Text-book on practical solid or descriptive geometry* ", Oxford , Longmans, Green, pp: 72-٧٥, 115-117, 2006.

# Finding The Intersection Of Geometrical Loci Of Spatial Bodies Using Descriptive Geometry – The Case Of Cylinder As An Example

**Abstract**

During the engineering design process, the designer (civil – architectural – mechanical) might have to use the geometrical loci for some bodies, specially those that are subjected to geometrical and dimensioning constraints.

In this paper, we studied the intersections of loci for spatial bodies using descriptive geometry instead of arithmetical and analytical methods that are usually used. The result of intersection was expressed as a locus up to reaching a clear, simple and applicable graphical solution.